

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

1. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{2 - \sqrt{x}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$

v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - \sqrt{x-2}}{x-3}$

vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x)$

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$

ix. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$

2. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(kx)}{x^2}, k \neq 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin(kx)}{x}, k \neq 0$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), [t = 1/x]$

v. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\sin x}$

vi. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

3. Να μελετηθούν ως προς την συνέχεια οι πιο κάτω συναρτήσεις:

i. $f(x) = \begin{cases} 3 + x, & x \leq 1 \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x + 2}$

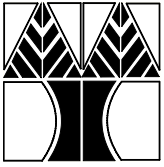
iii. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 \leq x < 4 \\ \frac{x+1}{x-1}, & x \geq 4 \end{cases}$

iv. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ 2x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 3x - 1, & x > 1 \end{cases}$

4. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο σημείο $x = 0$.



5. Να προσδιοριστούν οι σταθερές a και b τέτοιες ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\pi/2 \\ a \sin x + b, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \cos x, & x \geq \pi/2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

6. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{1 + 3e^x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(-e^x)}$

7. Να προσδιοριστούν οι σταθερές a και b τέτοιες ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 1 \\ ax + b + \ln x, & 1 < x < 2 \\ \ln x, & x \geq 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

8. Να προσδιοριστεί η τιμή του λ ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + \lambda \sin x, & 0 \leq x \leq \pi/4 \\ (2\lambda + 1) \tan x, & \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi/2)$.

9. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}(x^2 - 1)$$

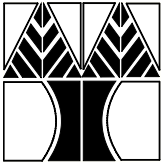
και να γίνει η γραφική της παράσταση.

10. Να βρεθούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

11. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) σημεία ασυνέχειας και να εξεταστεί αν είναι διορθώσιμα σημεία.

i. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ ii. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 17x + 15}{x^2 + 2x - 15}$



12. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς k τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2}, & x \geq -\frac{2}{7}, x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

13. Να βρεθούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x^2-x}$$

14. Ναδειχτεί ότι οι πιο κάτω εξισώσεις έχουν τουλάχιστον μια ρίζα στα διαστήματα που δίνονται:

$$\text{i. } x - \cos x = 0, [0, \pi/2] \quad \text{ii. } x + \sin x - 1 = 0, [0, \pi/6]$$