

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

1. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της παραγώγου για να βρεθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

ii. $f(x) = \sqrt{x+1}$

iii. $f(x) = x^{1/3}$

iv. $f(x) = \cos x$

v. $f(x) = \tan x$

vi. $f(x) = \sec x$

2. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b αν η εφαπτομένη της καμπύλης $y = ax^2 + bx$ στο σημείο $(1,5)$ έχει κλίση ίση με $\lambda = 8$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

i. $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$

ii. $f_2(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2 \\ x+2-\sqrt{x+2}, & -2 \leq x < 0 \end{cases}$

Να εξεταστεί αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2, f_1 + f_2$ είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $x = -2$.

4. (α) Αν $y = \frac{\sin x}{x}$ να δειχθεί ότι $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.

(β) Αν $x^2 + y^2 = 2y$ να δειχθεί ότι $(1-y)^3 y'' = 1$.

(γ) Αν $y = \sqrt{\sec 2x}$ να δειχθεί ότι $y'' - 3y^5 + y = 0$.

(δ) Αν $y = \sqrt{5x^2 + 3}$ να δειχθεί ότι $yy'' + (y')^2 = 5$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ k(x-1), & x > 1 \end{cases}$.

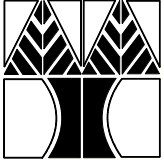
Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες η f είναι (α) συνεχής και (β) παραγωγίσιμη.

6. Έστω η καμπύλη η οποία περιγράφεται παραμετρικά $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 7, y = t^2 + t + 1$.
Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου t για τις οποίες η καμπύλη έχει (α) οριζόντια και (β) κατακόρυφη εφαπτομένη.

7. Να δειχθεί ότι η καμπύλη η οποία περιγράφεται παραμετρικά

$x = t^2 - 3t + 5, y = t^3 + t^2 - 10t + 9$ τέμνει τον εαυτό της στο σημείο $(3,1)$. Σε αυτό το σημείο να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης.

8. Αν $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ να δειχθεί ότι: $(1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$.



9. Να βρεθούν οι παράγωγοι:

i. $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

ii. $f(x) = \tan^{-1}(xe^{2x})$

iii. $f(x) = \sin^{-1}(x^2 \ln x)$

iv. $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{\ln x}$

10. Να βρεθούν οι παράγωγοι:

i. $f(x) = 2x^2 \sqrt{2-x}$

ii. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

iii. $f(x) = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3$

iv. $f(x) = \left(\frac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$

11. Να βρεθεί η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης των πιο κάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = \sqrt{x-5}$

ii. $f(x) = x^2 + 2$

iii. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

12. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος, y'' των

i. $x + xy + y = 2$

ii. $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

13. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των καμπύλων $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ και $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ στην αρχή των αξόνων τέμνονται κάθετα.

14. Να δειχθεί ότι η έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 45$ και η υπερβολή $x^2 - 4y^2 = 5$ είναι ορθογώνιες.

15. Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των καμπύλων $y = \ln(x-2)$ και $y = x^2 - 4x + 3$ στο σημείο τομής $(3,0)$ σχηματίζουν γωνία ίση με $\tan^{-1} \frac{1}{3}$.

16. Να βρεθεί η $1^{\text{η}}$ και η $2^{\text{η}}$ παράγωγος των πιο κάτω συναρτήσεων:

i. $x = 2 \sin t, y = \cos 2t$

ii. $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$

17. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης των πιο κάτω καμπύλων στο σημείο που δίνεται

i. $x = 3e^t, y = 5e^{-t}, t = 0$

ii. $x = a \cos^4 \theta, y = a \sin^4 \theta, \theta = \pi/4$

18. Αν $f'(x) = \sin(x^2)$ και $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$, να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$.