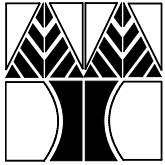


Ασκήσεις Κεφαλαίου 5

- Έστω ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση. Να γίνει η γραφική παράσταση της f για τις πιο κάτω περιπτώσεις
 - $f(2) = 4, f'(2) = 0, f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $f(2) = 4, f'(2) = 0, f''(x) < 0$, όταν $x < 2$ και $f''(x) > 0$, όταν $x > 2$
 - $f(2) = 4, f''(x) > 0$, όταν $x \neq 2$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = +\infty$
- Το σημείο $(-1/2, 4)$ είναι τοπικό ακρότατο της $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + ax + b$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b .
- Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:
 - $f(x) = x^4 - 8x^2 + 17$
 - $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
 - $f(x) = \sin x - x$
- Να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις:
 - $f(x) = \frac{2(x+6)(x-4)}{(x-6)(x+4)}$
(όχι σημεία καμπής)
 - $f(x) = \frac{2x-x^2}{x^2-2x-3}$
 - $f(x) = 1 - x^{2/3}$
 - $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
 - $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$
 - $f(x) = x\sqrt{1-x}$
- Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου $(4, 2)$ από την παραβολή $y^2 = 8x$.
- Να βρεθεί το σημείο της καμπύλης $2y^2 = 5(x+1)$ το οποίο είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.
- Να βρεθούν τα σημεία της καμπύλης $x^2 - y^2 = 1$ τα οποία είναι πλησιέστερα στο σημείο $(0, 2)$.
- Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:
 - $f(x) = 2\sec x - \tan x, [0, \pi/4]$
 - $f(x) = |6 - 4x|, [-3, 3]$
 - $f(x) = \sin(\cos x), [0, 2\pi]$
 - $f(x) = 1 + \frac{1}{x}, (0, +\infty)$
- Να βρεθούν τα απόλυτα ακρότατα της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2, & x < 1 \\ (x-2)(x-3), & x \geq 1 \end{cases}$$
στο διάστημα $[1/2, 7/2]$.



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$. Ναδειχθεί ότι η $f(x)$ είναι πάντοτε μη αρνητική.

Να βρεθούν οι ασύμπτωτες και τα τοπικά ακρότατα της καμπύλης $y = f(x)$ και στη συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα απόλυτα ακρότατα της $f(x)$.

11. Η καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{ax+b}{x^2-x-2}$, όπου a και b είναι σταθερές, έχει στάσιμο σημείο το $(1,1)$. Να βρεθούν οι τιμές των σταθερών a και b και στην συνέχεια να γίνει η γραφική παράσταση της καμπύλης.

12. Η καμπύλη $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ έχει τοπικό ακρότατο το σημείο $(1,8)$ και το σημείο με τετμημένη $x = -1$ σημείο καμπής. Να βρείτε τις τιμές των a , b και c .

13. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

14. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $y = x^3 - 3px + q$ έχει τοπικά ακρότατα.

15. Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$ έχει τοπικά ακρότατα.

16. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1,2]$ και να βρεθεί $c \in (-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(c) = 0$.

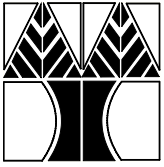
17. Να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Rolle προκειμένου ναδειχθεί ότι η εξίσωση $6x^5 - 4x + 1$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{x}$, με $x \in [0,4]$. Να βρείτε τον αριθμό $c \in (0,4)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής.

19. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f'(x) = -3, \forall x \in \mathbb{R}$. Αν $f(2) = 1$, να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα μέσης τιμής για να δείξετε ότι $f(x) = -3x + 7$.

20. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι αύξουσες ή φθίνουσες καθώς και τα ακρότατα των συναρτήσεων:

(α) $f(x) = x^2 - \ln(2x+1)$ (β) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ (γ) $f(x) = x^2 - 1 - 2x^2 \ln x$



21. Να βρείτε τα απόλυτα ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων στα διαστήματα που δίνονται:

(α) $f(x) = x^2 - \ln(2x + 1)$, $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$

(β) $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

(γ) $f(x) = x^2 - 1 - 2x^2 \ln x$, $(0, 4]$