



Ασκήσεις Κεφαλαίου 6

1. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

i. $\int \sqrt{x}(x^2 + 4x^3)dx$

ii. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$

iii. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

iv. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$

v. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

vi. $\int_{-2}^2 |2x - 5| dx$

2. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε $f'(x) = 6 - 5 \sin 2x$ και $f(0) = 3$.

3. Αν $f'(x) = \sqrt{x}$ και $f(1) = 5$, να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$.

4. Να υπολογιστούν γεωμετρικώς τα εμβαδά που ορίζονται από τα πιο κάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^5 4x dx$

ii. $\int_0^5 |x-1| dx$

iii. $\int_0^{15} f(x) dx$, $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x, & x \leq 3 \\ 4, & 3 < x < 12 \\ -\frac{4}{3}x + 20, & x \geq 12 \end{cases}$

5. Να δειχθεί ότι $\int_0^1 x^2 \sin x dx \leq \frac{1}{3}$.

6. Να βρεθεί η τιμή του x :

i. $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 3$

ii. $\int_x^0 \frac{1}{(3t+1)^2} dt = -\frac{1}{6}$

iii. $\int_2^x (4t-1) dt = 9$

7. Να βρεθεί η μέση τιμή της $f(x)$ στο διάστημα που δίνεται και να βρεθούν όλες οι τιμές που αναφέρονται στο θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα.

i. $f(x) = 2 + |x|$, $[-3,1]$

ii. $f(x) = \sin^2 x$, $[0, \pi]$

iii. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, $[0,4]$

8. Να υπολογιστούν οι πιο κάτω παράγωγοι:

i. $\frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^{x^3} \sin^2 t dt \right]$

ii. $\frac{d}{dx} \left[\int_{-x}^x \frac{1}{1+t} dt \right]$

iii. $\frac{d}{dx} \left[\int_{-1}^{x^2+\sqrt{x}} (t + \sqrt{t}) dt \right]$

9. Αν $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt$, να βρεθούν: (i) $F(1)$ και (ii) $F'(1)$.