Κεφάλαιο: Άπειρες Σειρές

Ασκήσεις

1. Να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνει. Αν συγκλίνει, να βρεθούν τα όρια τους.

i. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{7}{6^{k-1}}$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{2}\right)^{k+1}$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$

iv. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}$ *v.* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$

2. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές να δειχτεί ότι:

i. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x} \quad \alpha\nu \quad -1 < x < 1$

ii. $\sum_{k=0}^{\infty}(x-3)^k = \frac{1}{4-x} \quad \alpha\nu \quad 2 < x < 4$

3. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο απόκλισης, να δειχτεί ότι οι πιο κάτω σειρές αποκλίνουν:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2+k+3}{2k^2+1}$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$

4. Να εφαρμοστεί το κριτήριο του λόγου στις πιο κάτω σειρές και να εξαχθούν συμπεράσματα για τη σύγκλιση τους:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k}{k^2}$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

iv. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^3}$ *v.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$ *vi.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{3^k}$

Κεφάλαιο: Άπειρες Σειρές

5. Να εφαρμοστεί το κριτήριο της ρίζας στις πιο κάτω σειρές και να εξαχθούν συμπεράσματα για τη σύγκλιση τους:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{1998}\right)^k$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{5^k}$ *iv.* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+e^{-k}\right)^k$

6. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ολοκλήρωσης να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+1}$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\left[\ln(k+1)\right]^2}$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}k}{1+k^2}$

7. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k$ *ii.* $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7k-1}\right)^k$ *iv.* $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+4)!}{4!k!4^k}$

8. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης του ορίου, να εξεταστούν ως προς την σύγκλιση οι πιο κάτω σειρές:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-2k+6}{8k^7+k-8}$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{3^k+1}$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+3)^{20}}$

9. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου για απόλυτη σύγκλιση, να εξεταστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα:

i. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^k$ *ii.* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k^2}$ *iii.* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k^3}{e^k}$ *iv.* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k^k}{k!}$

10. Να ταξινομηθούν οι πιο κάτω σειρές σε απολύτως συγκλίνουσες και αποκλίνουσες.

i. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{k+2}{3k-1}\right)^k$ *ii.* $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$ *iii.* $\sum_{k=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln k}\right)^k$