Κεφάλαιο: Πίνακες

Ασκήσεις

1. Έστω οι πίνακες:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν τα εξής:

(i) $\mathrm{A}+\mathrm{B}+C$ **, (ii)** $2\mathrm{A}-C$, **(iii)** $2\mathrm{B}+3C$

Να βρεθεί ο πίνακας D τέτοιος ώστε $\mathrm{A}+D=\mathrm{B}$.

2. Έστω οι πίνακες:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix},\quad \mathrm{D}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Να υπολογιστούν (όπου ορίζονται) οι παρακάτω πολλαπλασιασμοί πινάκων :

i. AB	***ii.*** BA	***iii.*** $\mathrm{A}C$	***iv.*** $C\mathrm{A}$	***v.*** $\mathrm{A}D$
vi. $D\mathrm{B}$	***vii.*** $C\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$	***viii.*** $\mathrm{B}^{\mathrm{T}}C$	***ix.*** CD	***x.*** DD^{T}
xi. C^2	***xii.*** CC^{T}	***xiii.*** $\mathrm{A}C^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$	***xiv.*** AA^{T}	

3. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω πίνακες είναι ορθογώνιοι:

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}\cos\phi & 0 & \sin\phi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi\end{bmatrix}$$

4. Αν ο πίνακας A είναι τετραγωνικός πίνακας, να δειχθεί ότι:

i. οι πίνακες $\mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ και $\mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ είναι συμμετρικοί

ii. ο πίνακας $\mathrm{A}-\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$ είναι αντισυμμετρικός

5. Χρησιμοποιώντας ισοδυναμία πινάκων, να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} των πιο κάτω πινάκων:

i. $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 10 & -9 \\ -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

ii. $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

iii. $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

iv. $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

6. Με χρήση του κατάλληλου αντίστροφου, να λυθούν τα συστήματα:

i. $$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3 &= 6 \\ 2x_1-x_2+3x_3 &= -9 \\ x_1-2x_2-2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3 &= -5 \\ -2x_1+3x_2+2x_3 &= 1 \\ -x_1+4x_2+3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

iii. $$\begin{aligned} 2x_1+x_3 &= 0 \\ x_1+3x_2-4x_3 &= -15 \\ x_1+x_2+2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο: Πίνακες

7. Να βρεθεί ο πίνακας X έτσι ώστε : $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -8 & 8 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -13/2 \\ 10 \\ 34 \end{bmatrix}$

8. Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ να επιβεβαιωθεί ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

i. $(A+B)^T = A^T + B^T$

ii. $(AB)^T = B^T A^T$

iii. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

iv. $tr(5A) = 5tr(A)$

v. $tr(A^T) = tr(A)$

vi. $tr(AB) = tr(BA)$