ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΣ002

Α. Εφαρμογές ολοκληρωμάτων

Εμβαδόν χωρίου μεταξύ καμπυλών $y = f(x)$, $y = g(x)$	$\int_a^b \lvert f(x) - g(x) \rvert \, dx$
Μήκος τόξου καμπύλης $y = f(x)$	$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$
Όγκος στερεού από περιστροφή καμπύλης $y = f(x)$ γύρω από τον άξονα x	$\pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$
Εμβαδόν επιφάνειας στερεού από περιστροφή καμπύλης $y = f(x)$ γύρω από τον άξονα x	$2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

Β. Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών

Β1. Κριτήριο απόκλισης: Αν $\lim_{\kappa\to\infty} a_\kappa \neq 0$, τότε η σειρά $\sum a_\kappa$ αποκλίνει.

Β2. Κριτήρια για σειρές $\sum a_\kappa$, $\sum b_\kappa$ με θετικούς όρους.

Κριτήριο ολοκλήρωσης	Αν $a_\kappa = f(x)$ όπου η $f(x)$ είναι θετική και φθίνουσα για κάθε $x \geq 1$, τότε $\sum a_\kappa$ και $\int_1^\infty f(x)\,dx$ αμφότερα συγκλίνουν ή αποκλίνουν.
Κριτήριο οριακής σύγκρισης	Αν το όριο $\rho = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{a_\kappa}{b_\kappa}$ υπάρχει και $\rho > 0$, τότε οι $\sum a_\kappa$, $\sum b_\kappa$ αμφότερες συγκλίνουν ή αποκλίνουν.
Κριτήριο λόγου	Για $\rho = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{a_{\kappa+1}}{a_\kappa}$: αν $\rho < 1$ η $\sum a_\kappa$ συγκλίνει, αν $\rho > 1$ η $\sum a_\kappa$ αποκλίνει, αν $\rho = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα.
Κριτήριο ρίζας	Για $\rho = \lim_{\kappa\to\infty} (a_\kappa)^{1/\kappa}$: αν $\rho < 1$ η $\sum a_\kappa$ συγκλίνει, αν $\rho > 1$ η $\sum a_\kappa$ αποκλίνει, αν $\rho = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα.

Β3. Κριτήριο για εναλάσσουσες σειρές

Οι σειρές $\sum_{\kappa=1}^\infty (-1)^{\kappa+1} a_\kappa$ και $\sum_{\kappa=1}^\infty (-1)^\kappa a_\kappa$ συγκλίνουν αν:

- $a_\kappa > a_{\kappa+1}$
- $\lim_{\kappa\to\infty} a_\kappa = 0$

Β4. Κριτήριο λόγου για απόλυτη σύγκλιση

Αν $\sum a_\kappa$ είναι μια σειρά με όρους διάφορους του μηδενός και $\rho = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{|a_{\kappa+1}|}{|a_\kappa|}$ τότε:

- αν $\rho < 1$ η $\sum a_\kappa$ συγκλίνει απόλυτα,
- αν $\rho > 1$ η $\sum a_\kappa$ αποκλίνει,
- αν $\rho = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα.

Γ. Γνωστές δυναμοσειρές

- $e^x = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{x^\kappa}{\kappa!}$
- $\ln(1+x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} \quad (-1 < x \leq 1)$
- $\sin x = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}$
- $\cos x = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{x^{2\kappa}}{(2\kappa)!}$
- $\sinh x = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{x^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{x^{2\kappa}}{(2\kappa)!}$

Δ. Διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού

Δ1. Χωριζομένων μεταβλητών

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \iff \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx}$$

- Αν η εξίσωση έχει τη μορφή $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$, θέτουμε $u = \frac{y}{x} \implies \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$ και η εξίσωση γίνεται όπως παραπάνω.

Δ2. Γραμμικές εξισώσεις

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)}$$

1. Θέτουμε $I(x) = e^{\int f(x)\,dx}$
2. Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με $I(x)$ η οποία γίνεται $\frac{d}{dx}[I(x)y] = I(x)g(x)$.
3. Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης.

Ε. Διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Ε1. Γραμμικές ομογενείς

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0}$$

- Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $m^2 + am + b = 0$
- Αν έχει δύο πραγματικές λύσεις m_1, m_2, τότε $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$.
- Αν έχει μία πραγματική λύση m_0, τότε $y = c_1 e^{m_0 x} + c_2 x e^{m_0 x}$.
- Αν έχει δύο μιγαδικές λύσεις $\kappa \pm i\lambda$ τότε $y = e^{\kappa x}(c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x))$.

Ε2. Γραμμικές μη ομογενείς

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x)}$$

Η λύση είναι $y = y_\sigma + y_\mu$ όπου

- y_σ η λύση της αντίστοιχης ομογενούς,
- y_μ μία ειδική λύση της μη ομογενούς που βρίσκεται από τον παρακάτω πίνακα.

$f(x)$	y_μ
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$
κe^{ax}	Ae^{ax}
$(a_1 \cos(\lambda x) + a_2 \sin(\lambda x))e^{ax}$	$(A_1 \cos(\lambda x) + A_2 \sin(\lambda x))e^{ax}$

*Αν ένας όρος της y_μ είναι όρος της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς, πολλαπλασιάζουμε με τη μικρότερη θετική δύναμη του x ώστε κανένας όρος να μην είναι λύση της ομογενούς.

ΣΤ. Υπερβολικές Συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \qquad \sinh(x \pm y) = \sinh x \ \cosh y \pm \sinh y \ \cosh x$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \qquad \cosh(x \pm y) = \cosh x \ \cosh y \pm \sinh x \ \sinh y$$

$$\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$
$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \ \tanh x$$
$$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \ \coth x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$$
$$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$
$$\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$$

Ζ. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$
$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = 2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{y-x}{2}\right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\sin =$ ημ
$\cos =$ συν
$\tan =$ εφ
$\cot =$ σφ
$\sec =$ τεμ
$\csc = \operatorname{cosec} =$ στεμ
$\sin^{-1} =$ τοξημ
$\tan^{-1} =$ τοξεφ