

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021-2022**

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτηση  $r(t) = (\cos \pi t)i - \ln t j + (\sqrt{t-2})k$ .

**Απάντηση:**  $[2, +\infty)$

2. Να περιγράψετε το γράφημα της διανυσματικής εξίσωσης.

i)  $\vec{r} = (3 - 2t)i + 5tj$ ,

ii)  $\vec{r} = 2 \cos t i - 3 \sin t j + k$ .

**Απάντηση:** i) ευθεία, ii) έλλειψη

3. Να δειχθεί ότι το γράφημα της διανυσματικής συνάρτηση  $r(t) = \sin t i + 2 \cos t j + \sqrt{3} \sin t k$  είναι κύκλος. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι το γράφημα βρίσκεται στην τομή σφαίρας και επιπέδου.)

**Απάντηση:**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  και  $z = \sqrt{3}x$

4. Να δειχθεί ότι η καμπύλη  $r(t) = t \cos t i + t \sin t j + t k$  ( $t \geq 0$ ) βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.

**Απάντηση:** Κωνική έλικα

5. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.

i)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$ , όπου  $r(t) = \left( \frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right)$ .

ii)  $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$ , όπου  $r(t) = \left( \frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \sin 2t \right)$ .

**Απάντηση:** i)  $(1/3, 0)$  ii)  $(3, 1/2, \sin 2)$

6. Είναι η συνάρτηση  $r(t) = t^2 i + \frac{1}{t} j + t k$  συνεχής στο 0;

**Απάντηση:** Όχι

7. Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $r(t) = 2 \cos \pi t i + 2 \sin \pi t j + 3t k$  στο σημείο όπου  $t_0 = \frac{1}{3}$ .

**Απάντηση:**  $\vec{r} = (1 - \sqrt{3}\pi t)i + (\sqrt{3} + \pi t)j + (1 + 3t)k$

8. Έστω  $r(t) = \cos t i + \sin t j + k$ . Να βρεθούν:

i)  $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) - r'(t))$ ,

ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \times r''(t))$ ,

iii)  $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \cdot r'(t))$ .

**Απάντηση:** i)  $i - j + k$ , ii)  $-j$ , iii) 0

9. Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα.

i)  $\int_0^1 (e^{2t}i + e^{-t}j + tk) dt,$

ii)  $\int \left( t^2i - 2tj + \frac{1}{t}k \right) dt.$

**Απάντηση:** i)  $(e^2/2 - 1/2)i - (1/e - 1)j + \frac{1}{2}k,$  ii)  $\frac{t^3}{3}i - t^2j + \ln |t|k + \vec{C}$

10. Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση  $y(t)$  που ικανοποιεί τις συνθήκες  $y'(t) = \cos ti + \sin tj$  και  $y(0) = i - j.$

**Απάντηση:**  $y(t) = (1 + \sin t)i - \cos tj$

11. Έστω σωματιδίο που κινείται στον χώρο με διάνυσμα θέσης  $r(t) = 12\sqrt{t}i + t^{3/2}j$  ( $t > 0$ ). Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου ταχύτητάς του και η θέση στην οποία την λαμβάνει.

**Απάντηση:**  $3\sqrt{2}$  στη θέση  $24i + 8j$

12. Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα σωματιδίου με επιτάχυνση  $a(t) = \sin ti + \cos tj + e^tk,$  αρχική ταχύτητα  $v(0) = k$  και αρχική θέση  $r(0) = -i + k.$

**Απάντηση:**  $r(t) = (t - \sin t - 1)i + (1 - \cos t)j + e^tk$

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.

