ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ
Εαρινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να υπολογιστούν τα διαδοχικά ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (x+3)\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_2^4\int_0^1 x^2y\,dx\,dy$

iii) $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx$ iv) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dy\,dx$

Απάντηση: i) 7 ii) 2 iii) 2 iv) $1-\ln 2$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στο δοσμένο ορθογώνιο.

i) $\displaystyle\iint_R 4xy^3\,dA$, $R=[-1,1]\times[-2,2]$

ii) $\displaystyle\iint_R x\sqrt{1-x^2}\,dA$, $R=[0,1]\times[2,3]$

Απάντηση: i) 0 ii) $1/3$

3. Περιγράψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο που εκφράζουν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^5\int_1^2 4\,dx\,dy$ ii) $\displaystyle\int_0^3\int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2}\,dy\,dx$

4. Να δείξετε ότι αν $f(x,y)=g(x)h(y)$ και $R=[a,b]\times[c,d]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \left[\int_a^b g(x)\,dx\right]\left[\int_c^d h(y)\,dy\right]$$

5. Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του επιπέδου $z=2x+y$ και του ορθογωνίου $R=[3,5]\times[1,2]$.

Απάντηση: 19

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού κάτω από την επιφάνεια $z=x^2$ που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0$, $x=2$, $y=3$, $y=0$ και $z=0$.

Απάντηση: 8

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\,dy\,dx$

Απάντηση: i) $1/40$ ii) $-\pi/2$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint\limits_R x^2\,dA$, όπου R το χωρίο που ορίζεται από τις $y = 16/x$, $y = x$ και $x = 8$, με δύο τρόπους.

Απάντηση: 576

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\iint\limits_R (x-1)\,dA$, όπου R το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των $y = x$ και $y = x^3$.

ii) $\displaystyle\iint\limits_R \sin\!\left(y^3\right)dA$, όπου R το χωρίο μεταξύ των $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ και $x = 0$.

Απάντηση: i) $-7/60$ ii) $(1-\cos 8)/3$

10. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από τις $y^2 = 9 - x$ και $y^2 = 9 - 9x$.

Απάντηση: 32

11. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = 9x^2 + y^2$, από κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και πλευρικά από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ και $y = 2$.

Απάντηση: $11/70$

12. Να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^4\int_{2y}^{8} f(x,y)\,dx\,dy$

Απάντηση: i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_{y^2} 2f(x,y)\,dx\,dy$ ii) $\displaystyle\int_0^8\int_0^{x/2} f(x,y)\,dx\,dy$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^{4} e^{-y^2}\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}\,dx\,dy$

Απάντηση: i) $(1-e^{-16})/8$ ii) $(e^8-1)/3$

14. Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω επιφανειών με διπλό ολοκλήρωμα.

i) Επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 9$ πάνω από το ορθογώνιο $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, -3 \le y \le 3\}$.
[Υπενθύμιση: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$*]*

ii) Επιφάνεια του κώνου $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ πάνω από το χωρίο που δημιουργούν οι καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου.

Απάντηση: i) 6π ii) $\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{1}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-1}^{y^2}\int_{-1}^{z} yz\,dx\,dz\,dy$

iii) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-z^2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx\,dz$ iv) $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{x}^{x^2}\int_{0}^{\ln z} xe^y\,dy\,dz\,dx$

Απάντηση: i) 8 ii) $\dfrac{47}{3}$ iii) $\dfrac{81}{5}$ iv) $\dfrac{118}{3}$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\iiint_G xy\sin(yz)\,dV$, όπου G το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις σχέσεις $0\le x\le\pi$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le \pi/6$.

ii) $\displaystyle\iiint_G y\,dV$, όπου G το στερεό που περικλείεται από το xy-επίπεδο, το επίπεδο $z=y$ και τον παραβολικό κύλινδρο $y=1-x^2$.

Απάντηση: i) $\dfrac{\pi(\pi-3)}{2}$ ii) $\dfrac{32}{105}$

17. Να υπολογιστεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με τριπλό ολοκλήρωμα.

i) Το στερεό στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από τα επίπεδα xy, xz και yz και από το επίπεδο $3x+6y+4z=12$.

ii) Το στερεό που περικλείεται από την επιφάνεια $z=\sqrt{y}$ και τα επίπεδα $x+y=1$, $x=0$ και $z=0$.

Απάντηση: i) 4 ii) $\dfrac{4}{15}$

18. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα του στερεού με τον αντίστοιχο όγκο.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{y+1} dz\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{2} dy\,dz\,dx$

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R \frac{x-2y}{2x+y}\,dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $x-2y=1$, $x-2y=4$, $2x+y=1$, $2x+y=3$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=x-2y$, $v=2x+y$.

Απάντηση: $\dfrac{3}{2}\ln 3$

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)\,dA$, όπου R το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$,

$(2, 0)$, $(1, 1)$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = \frac{1}{2}(x + y)$, $v = \frac{1}{2}(x - y)$.

Απάντηση: $1 - \dfrac{1}{2}\sin 2$

21. Να βρεθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint\limits_R \frac{y - 4x}{y + 4x}\, dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $y = 4x$, $y = 4x + 2$, $y = 2 - 4x$ και $y = 5 - 4x$.

Απάντηση: $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{5}{2}$

22. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x$, $v = z - y$, $w = xy$ να βρεθεί το ολοκήρωμα

$$\iiint\limits_G (z - y)^2 xy\, dV,$$

όπου G το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες $x = 1$, $x = 3$, $z = y$, $z = y + 1$, $xy = 2$ και $xy = 4$.

Απάντηση: $2\ln 3$.

23. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

i) $\displaystyle\iint\limits_R \sin\big(x^2 + y^2\big)\, dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$.

ii) $\displaystyle\iint\limits_R \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από το τμήμα του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

iv) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$

Απάντηση: i) $\pi(1 - \cos 9)$ ii) $9\pi/2$ iii) $\pi/8$ iv) $(1 - e^{-4})\pi$

24. Έστω S η επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ μεταξύ των επιπέδων $z = 1$ και $z = 2$. Να εκφραστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S με διπλό ολοκλήρωμα και να υπολογιστεί με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Απάντηση: 8π

25. Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με κυλινδρικές συντεταγμένες.

i) Το στερεό μεταξύ του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ και του επιπέδου $z = 9$.

ii) Το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Απάντηση: i) $81\pi/2$ ii) $\dfrac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

26. Να βρεθεί με σφαιρικές συντεταγμένες ο όγκος του στερεού που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = 9$, έξω από των κώνο $z = \sqrt{x^2+y^2}$ και πάνω από το xy-επίπεδο.

Απάντηση: $9\sqrt{2}\pi$

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

i) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} x^2 \, dz \, dy \, dx \qquad (a>0)$

ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$

Απάντηση: i) $\dfrac{\pi a^6}{48}$ ii) $\dfrac{\pi}{3}(1-e^{-1})$