

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $r(t) = (\cos \pi t)i - \ln t j + (\sqrt{t-2})k$.
2. Να περιγράψετε το γράφημα της διανυσματικής εξίσωσης.
 - i) $\vec{r} = (3 - 2t)i + 5tj$,
 - ii) $\vec{r} = 2 \cos t i - 3 \sin t j + k$.
3. Να δειχθεί ότι το γράφημα της διανυσματικής συνάρτησης $r(t) = \sin t i + 2 \cos t j + \sqrt{3} \sin t k$ είναι κύκλος. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι το γράφημα βρίσκεται στην τομή σφαίρας και επιπέδου.)
4. Να δειχθεί ότι η καμπύλη $r(t) = t \cos t i + t \sin t j + t k$ ($t \geq 0$) βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.
5. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.
 - i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$, όπου $r(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right)$.
 - ii) $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$, όπου $r(t) = \left(\frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \sin 2t \right)$.
6. Είναι η συνάρτηση $r(t) = t^2 i + \frac{1}{t} j + t k$ συνεχής στο 0;
7. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $r(t) = 2 \cos \pi t i + 2 \sin \pi t j + 3t k$ στο σημείο όπου $t_0 = \frac{1}{3}$.
8. Έστω $r(t) = \cos t i + \sin t j + k$. Να βρεθούν:
 - i) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) - r'(t))$,
 - ii) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \times r''(t))$,
 - iii) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \cdot r'(t))$.
9. Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα.
 - i) $\int_0^1 (e^{2t} i + e^{-t} j + t k) dt$,
 - ii) $\int \left(t^2 i - 2t j + \frac{1}{t} k \right) dt$.
10. Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $y(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $y'(t) = \cos t i + \sin t j$ και $y(0) = i - j$.
11. Έστω σωματίδιο που κινείται στον χώρο με διάνυσμα θέσης $r(t) = 12\sqrt{t} i + t^{3/2} j$ ($t > 0$). Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου ταχύτητάς του και η θέση στην οποία την λαμβάνει.

12. Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα σωματιδίου με επιτάχυνση $a(t) = \sin t i + \cos t j + e^t k$, αρχική ταχύτητα $v(0) = k$ και αρχική θέση $r(0) = -i + k$.

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.

