

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021-2022**

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε ότι η  $\phi(x, y) = \tan^{-1}(xy)$  είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου  $F(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}i + \frac{x}{1+x^2y^2}j$ .

2. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $F(x, y, z) = x^2i - 2j + yzk$ .

3. Έστω τα διανυσματικά πεδία  $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$ ,  $G(x, y, z) = xi + yj - zk$ . Να υπολογίσετε το  $\nabla \cdot (F \times G)$ .

4. Έστω  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτή συνάρτηση ή διανυσματικό πεδίο;

i)  $\text{curl}(\text{grad } F)$

ii)  $\text{grad}(\text{curl } F)$

iii)  $\text{div}(\text{grad } F)$

iv)  $\text{grad}(\text{div } F)$

v)  $\text{curl}(\text{div } F)$

vi)  $\text{div}(\text{curl } F)$

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i)  $\int_C \frac{1}{1+x} ds$ ,  $C : r(t) = ti + \frac{2}{3}t^{3/2}j$  ( $0 \leq t \leq 3$ ),

ii)  $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds$ ,  $C : x = 1 + 2t$ ,  $y = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_C F \cdot dr$ , όπου  $F(x, y) = 2i + 5j$  και  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα από το  $(1, -3)$  στο  $(4, -3)$ .

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_C (3x + 2y)dx + (2x - y)dy$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

i)  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ ,

ii)  $C$  το παραβολικό τόξο  $y = x^2$  από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ ,

iii)  $C$  η καμπύλη  $y = \sin(\pi x/2)$  από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ ,

iv)  $C$  η καμπύλη  $x = y^3$  από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ .

