

Κεφάλαιο 3 - Διανυσματικές συναρτήσεις

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.



3.1 Διανυσματικές συναρτήσεις

Είδαμε ότι οι παραμετρικές καμπύλες στο επίπεδο αντιστοιχούν σε ζεύγη εξισώσεων

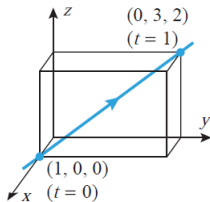
$$x = x(t), y = y(t)$$

Αντίστοιχα ορίζουμε **παραμετρικές καμπύλες στον χώρο** μέσω τριών εξισώσεων

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

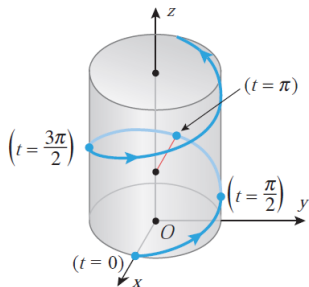
Παράδειγμα

$$x = 1 - t, y = 3t, z = 2t \quad (t \in \mathbb{R})$$



Παράδειγμα

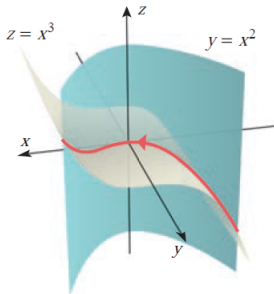
$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = t \quad (t \in \mathbb{R}, a > 0)$$



Η καμπύλη τομής δύο επιφανειών μπορεί επίσης να περιγραφεί ως παραμετρική καμπύλη.

Παράδειγμα

Να οριστεί παραμετρικά η καμπύλη τομής των επιφανειών $z = x^3$ και $y = x^2$.



Για να μελετήσουμε ιδιότητες των παραμετρικών καμπυλών (εφαπτομένες, καμπυλότητα, ...) τις θεωρούμε ως συναρτήσεις.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $r : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ή $r : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζεται **διανυσματική συνάρτηση**.

$$\begin{aligned}x = x(t), y = y(t) &\leftrightarrow r(t) = (x(t), y(t)) \\ &= x(t)i + y(t)j\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x = x(t), y = y(t), z = z(t) &\leftrightarrow r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \\ &= x(t)i + y(t)j + z(t)k\end{aligned}$$

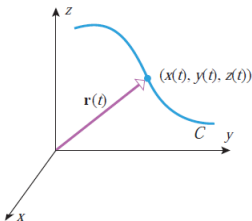
Οι $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ λέγονται **συνιστώσες** της $r(t)$.

Αν δεν δίνεται πεδίο ορισμού για μια διανυσματική συνάρτηση, θα εννοείται ότι είναι η τομή των πεδίων ορισμού των συνιστωσών της.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $r(t) = (\ln |1 - t|, e^t, \sqrt{t})$.

Για να παραστήσουμε γραφικά μια διανυσματική συνάρτηση σχεδιάζουμε την αντίστοιχη παραμετρική καμπύλη. Το $r(t)$ είναι το διάνυσμα θέσης των σημείων της καμπύλης.

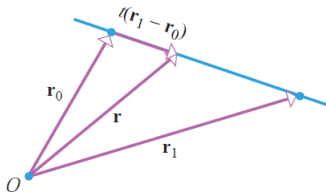


Παράδειγμα

Να γίνει το γράφημα της $r(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

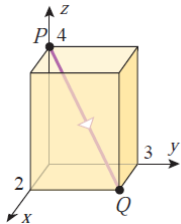
Παράδειγμα

Να βρεθεί η διανυσματική μορφή του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα P_0 και P_1 .



Παράδειγμα

Να βρεθεί διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει το ευθύγραμμο τμήμα PQ .



Παράδειγμα

Να γίνει αντιστοίχιση των διανυσματικών συναρτήσεων με τα γραφήματά τους.

(a) $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \sqrt{2 - t^2}\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r} = \sin \pi t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r} = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r} = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \sin 3t\mathbf{k}$

