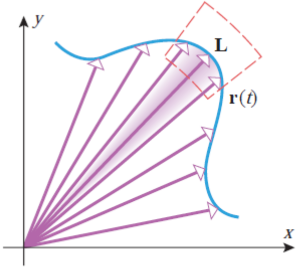
3.2 Όριο, συνέχεια και παράγωγος

Διανυσματικών συναρτήσεων

Διαισθητικά: αν καθώς το t τείνει στο a, το διάνυσμα $r(t)$ τείνει στο διάνυσμα $\vec{L}$, τότε θα λέμε ότι το όριο της $r(t)$ καθώς $t \to a$ είναι ίσο με $\vec{L}$, δηλαδή

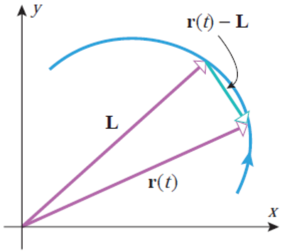
$$\lim_{t\to a} r(t) = \vec{L}$$



Ορισμός

Έστω $r(t)$ διανυσματική συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό διάστημα γύρω από το a (η συνάρτηση δεν ορίζεται απαραίτητα στο a). Τότε το όριο της $r(t)$ καθώς $t \to a$ είναι ίσο με $\vec{L}$ αν η απόσταση των διανυσμάτων $r(t)$ και $\vec{L}$ τείνει στο 0, δηλαδή

$$\lim_{t\to a} r(t) = \vec{L} \iff \lim_{t\to a} \left\| r(t) - \vec{L} \right\| = 0$$



Θεώρημα

- *Αν* $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, *τότε*

$$\lim_{t\to a} r(t) = \lim_{t\to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t\to a} y(t)\mathbf{j}.$$

- *Αν* $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, *τότε*

$$\lim_{t\to a} r(t) = \lim_{t\to a} x(t)\mathbf{i} + \lim_{t\to a} y(t)\mathbf{j} + \lim_{t\to a} z(t)\mathbf{k}.$$

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι το όριο διανυσματικής συνάρτησης υπολογίζεται κατά συνιστώσα.

Παράδειγμα

Έστω $r(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos(\pi t))\mathbf{k}$. Να βρεθεί το $\lim_{t\to 0} r(t)$.

Ορισμός

Έστω $r(t)$ διανυσματική συνάρτηση και $a \in \mathbb{R}$. Η $r(t)$ λέγεται **συνεχής** στο a αν

$$\lim_{t \to a} r(t) = r(a).$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε και συνέχεια διανυσματικής συνάρτησης σε διάστημα.

Θεώρημα

Μια διανυσματική συνάρτηση $r(t)$ είναι συνεχής στο a αν και μόνο αν οι συνιστώσες της είναι συνεχείς στο a.

Παράδειγμα

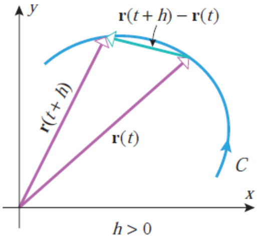
Για ποια t είναι η $r(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ συνεχής;

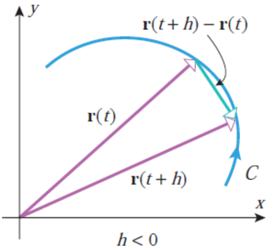
Ορισμός

Έστω $r(t)$ διανυσματική συνάρτηση. Η παράγωγος της $r(t)$, συμβολίζεται με $r'(t)$ και ορίζεται ως

$$r'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

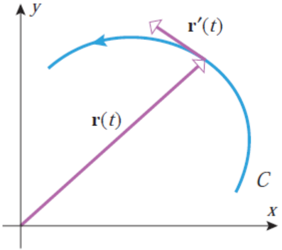
Άλλοι συμβολισμοί: $\dfrac{d}{dt} r(t)$, $\dfrac{dr}{dt}$, r'.





Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Η παράγωγος $r'(t)$ στο t_0 είναι διάνυσμα που αν τοποθετηθεί στο τέλος του $r(t_0)$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη με κατεύθυνση προς τα εκεί που αυξάνεται η παράμετρος.



Θεώρημα

Μια διανυσματική συνάρτηση $r(t)$ *είναι παραγωγίσιμη αν και μόνο αν κάθε συνιστώσα της είναι παραγωγίσιμη. Σε αυτήν την περίπτωση, η* $r'(t)$ *έχει ως συνιστώσες τις παραγώγους των συνιστωσών της* $r(t)$*.*

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος της $r(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos(\pi t))\mathbf{k}$.

Θεώρημα (Κανόνες Παραγώγισης Ι)

Έστω $r_1(t)$, $r_2(t)$ παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις, $f(t)$ παραγωγίσιμη βαθμωτή συνάρτηση, $k \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{c}$ σταθερή διανυσματική συνάρτηση. Τότε ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης.

$$(a)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{c}] = \mathbf{0}$$

$$(b)\quad \frac{d}{dt}[k\mathbf{r}(t)] = k\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)]$$

$$(c)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] + \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

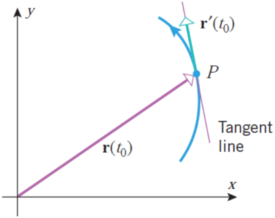
$$(d)\quad \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)] - \frac{d}{dt}[\mathbf{r}_2(t)]$$

$$(e)\quad \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)] + \frac{d}{dt}[f(t)]\mathbf{r}(t)$$

Εφαπτομένη διανυσματικής συνάρτησης

Ορισμός

Έστω P ένα σημείο στο γράφημα διανυσματική συνάρτησης $r(t)$ και έστω t_0 ώστε το $r(t_0)$ είναι το διάνυσμα θέσης του P. Αν το $r'(t_0)$ υπάρχει και $r'(t_0) \neq \vec{0}$ τότε το $r'(t_0)$ λέγεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** της $r(t)$ στο σημείο P και η ευθεία που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη στο $r'(t_0)$ λέγεται **εφαπτομένη** της $r(t)$ στο $r(t_0)$.



Ο ορισμός αυτός μας δίνει ταυτόχρονα και ορισμό εφαπτομένης παραμετρικής καμπύλης.

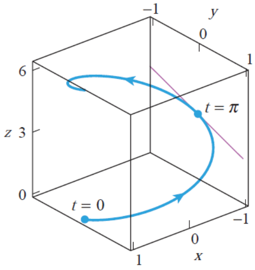
Εφαπτομένη διανυσματικής συνάρτησης

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εφαπτομένη της παραμετρικής έλικας

$$x = \cos t, \;\; y = \sin t, \;\; z = t$$

1. για τυχαίο t_0,
2. για $t = \pi$.



Θεώρημα (Κανόνες Παραγώγισης II)

Έστω $r_1(t)$, $r_2(t)$ παραγωγίσιμες διανυσματικές συναρτήσεις.

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2(t)$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, θα γενικεύσουμε το γεγονός ότι η εφαπτομένη κύκλου είναι πάντα καθετη στην ακτίνα.

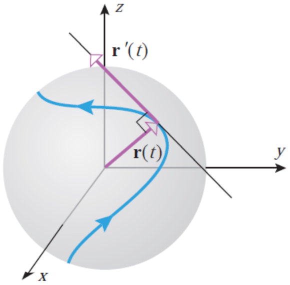
Θεώρημα

Αν η $r(t)$ είναι παραγωγίσιμη διανυσματική συνάρτηση και το $\|r(t)\|$ είναι σταθερό για κάθε t, τότε

$$r(t) \cdot r'(t) = 0,$$

δηλαδή το $r(t)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα.

Απόδειξη:



Το ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης ορίζεται με αθροίσματα όπως και στις βαθμωτές συναρτήσεις. Παραλείπουμε τον ορισμό και δίνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Έστω $r(t)$ συνεχής διανυσματική συνάρτηση στο $[a, b]$. Τότε η $r(t)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j} \qquad \boxed{\text{2-space}}$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\mathbf{k} \qquad \boxed{\text{3-space}}$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης γίνεται κατά συνιστώσα.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το ολοκλήρωμα στο $[0,1]$ της $r(t) = t^2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - (2\cos(\pi t))\mathbf{k}$.

Θεώρημα

Έστω $r_1(t)$, $r_2(t)$ *συνεχείς διανυσματικές συναρτήσεις στο* $[a, b]$ *και* $k \in \mathbb{R}$.

$$(a) \quad \int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$$

$$(b) \quad \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt + \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

$$(c) \quad \int_a^b [\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt - \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί διανυσματική συνάρτηση $r(t)$ ώστε $r'(t) = 3i + 2tj$ και $r(1) = 2i + 5j$.

Ορισμός

Έστω παραμετρική καμπύλη στον χώρο που περιγράφεται από την διανυσματική συνάρτηση $r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Τότε το μήκος τόξου της καμπύλης είναι

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μήκος τόξου της έλικας

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$$

για $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Η διανυσματική συνάρτηση $r(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως διάνυσμα θέσης σωματιδίου που κινείται στο γράφημά της.

$$\begin{array}{ccc} r(t) & \to & \text{διάνυσμα θέσης} \\ r'(t) & \to & \text{διάνυσμα ταχύτητας} \\ \|r'(t)\| & \to & \text{μέτρο ταχύτητας} \\ r''(t) & \to & \text{διάνυσμα επιτάχυνσης} \end{array}$$

Παράδειγμα

Ένα σωματίδιο κινείται στον χώρο με ταχύτητα $v(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$. Σε ποια θέση βρίσκεται σε χρόνο $t = 1$ αν ξεκίνησε από τη θέση $-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$;