

Κεφάλαιο 4 - Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.



4.1. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πολλά φυσικά μεγέθη εξαρτώνται από περισσότερες από μία μεταβλητές.

Εμβαδόν ορθογωνίου	↔	συνάρτηση μήκους και πλάτους
Όγκος παραλληλεπίπεδου	↔	συνάρτηση μήκους, πλάτους και ύψους
Μέση τιμή n πραγματικών αριθμών	↔	συνάρτηση n πραγματικών αριθμών

Ορισμός

Μια **πραγματική** ή **βαθμωτή** συνάρτηση f δύο μεταβλητών x και y με πεδίο ορισμού D είναι μια διαδικασία που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος $(x, y) \in D$ έναν πραγματικό αριθμό $f(x, y)$.

- Η εξίσωση $z = f(x, y)$ παριστάνει μια επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 .

Ορισμός

Μια **πραγματική** ή **βαθμωτή** συνάρτηση f τριών μεταβλητών x , y και z με πεδίο ορισμού D είναι μια διαδικασία που αντιστοιχεί σε κάθε τριάδα $(x, y, z) \in D$ έναν πραγματικό αριθμό $f(x, y, z)$.

- Η εξίσωση $w = f(x, y, z)$ παριστάνει μια επιφάνεια στον \mathbb{R}^4 , άρα δεν υπάρχει γεωμετρική απεικόνιση.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$. Να βρεθεί το $f(e, 0)$ και να σχεδιαστεί το πεδίο ορισμού της f .

Παράδειγμα

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$.

Παράδειγμα

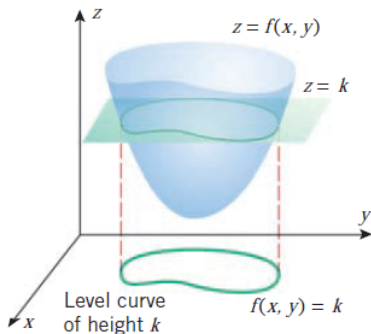
Να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ορισμός

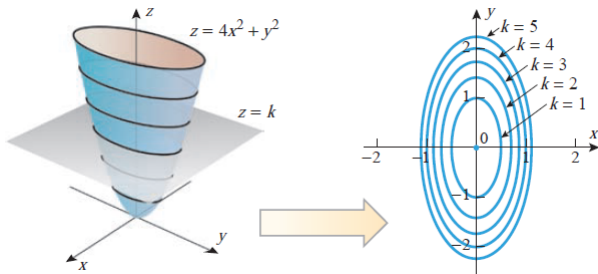
Έστω $z = f(x, y)$ συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η καμπύλη που προκύπτει από την εξίσωση $z = k$, όπου $k \in \mathbb{R}$ λέγεται **καμπύλη στάθμης ύψους k** .



Σχεδιάζοντας τις καμπύλες στάθμης στο xy -επίπεδο παίρνουμε μια δισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης.

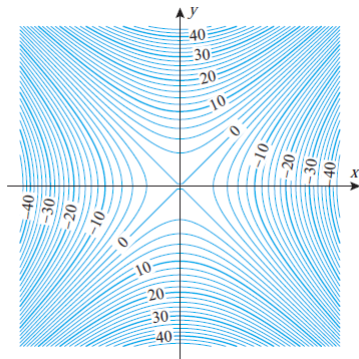
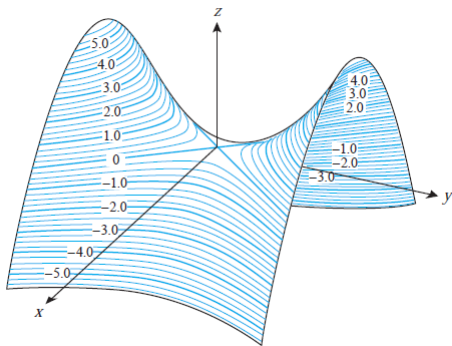
Παράδειγμα

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2$$



Παράδειγμα

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$



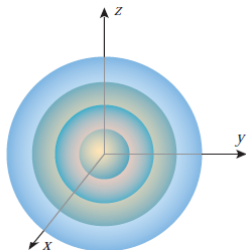
Επιφάνειες στάθμης

Ορισμός

Έστω $w = f(x, y, z)$ συνάρτηση τριών μεταβλητών. Η επιφάνεια που προκύπτει από την εξίσωση $w = k$, όπου $k \in \mathbb{R}$ λέγεται **επιφάνεια στάθμης με τιμή k** .

Παράδειγμα

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$



Παράδειγμα

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

