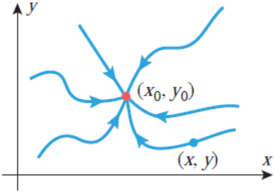
4.2 Όρια και συνέχεια
Συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Υπενθύμιση: Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής, τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \text{ και } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

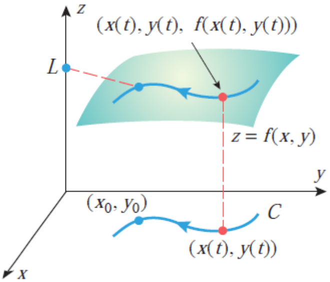
Ο χαρακτηρισμός βασίζεται στο γεγονός ότι σε έναν άξονα μπορούμε να κινηθούμε μόνο δεξιά ή αριστερά.
Για να γενικεύσουμε σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών, λαμβάνουμε υπόψιν ότι το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του xy-επιπέδου, άρα έχουμε περισσότερες κατευθύνσεις που μπορούμε να κινηθούμε.



Ορισμός

Έστω $f(x,y)$ μια συνάρτηση και $C : x = x(t),\ y = y(t)$ παραμετρική καμπύλη που διέρχεται από το (x_0, y_0), όπου $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Ορίζουμε το **όριο της** f **στο** (x_0, y_0) **κατά μήκος της** C ως εξής:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ C}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t))$$



Αντίστοιχα ορίζεται και το όριο κατά μήκος καμπύλης σε συνάρτηση τριών μεταβλητών.

Ορισμός

Έστω $f(x,y,z)$ μια συνάρτηση και $C : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ παραμετρική καμπύλη που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0), όπου $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ και $z_0 = z(t_0)$. Ορίζουμε το **όριο της f στο (x_0, y_0, z_0) κατά μήκος της C** ως εξής:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)\\ C}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t), z(t))$$

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά μήκος:

- του άξονα x

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά μήκος:

- του άξονα y

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Να βρεθεί το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά μήκος:

- της ευθείας $y = x$

Παράδειγμα

Έστω $f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$. Να βρεθεί το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ κατά μήκος:

- της ευθείας $y = -x$

Παράδειγμα

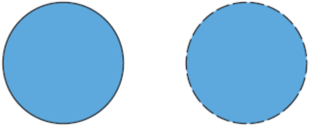
Έστω $f(x,y) = -\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ κατά μήκος:

- της παραβολής $y = x^2$

Για να μπορούμε να θεωρήσουμε τυχαία καμπύλη που διέρχεται από ένα σημείο (x_0, y_0) χρησιμοποιούμε ανοιχτά σύνολα.

Ορισμός

Έστω C κύκλος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r. Το σύνολο των σημειών που περικλείεται από το C χωρίς τα σημεία του ίδιου του κύκλου ονομάζεται **ανοικτός δίσκος** με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r. Αν συμπεριλάβουμε και τα σημεία του κύκλου τότε ορίζουμε τον **κλειστό δίσκο** με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r.

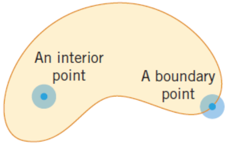


Αντίστοιχα, σε τρεις διαστάσεις ορίζουμε την ανοικτή και κλειστή μπάλα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα r.

Ορισμός

Έστω D ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

- Ένα σημείο (x_0, y_0) του D λέγεται **εσωτερικό σημείο** αν υπάρχει ανοικτός δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) που να περιέχεται ολόκληρος στο D.
- Ένα σημείο (x_0, y_0) του D λέγεται **συνοριακό σημείο** αν κάθε ανοικτός δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) περιέχει σημεία και εντός και εκτός του D.
- Το D λέγεται **κλειστό** αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.
- Το D λέγεται **ανοικτό** αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό σημείο.



Αντίστοιχοι ορισμοί δίνονται και σε τρεις διαστάσεις.

Ορισμός

Έστω $f(x, y)$ συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό δίσκο D με κέντρο το (x_0, y_0) με εξαίρεση το σημείο (x_0, y_0). Θα γράφουμε

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

αν καθώς το $(x, y) \in D$ πλησιάζει το (x_0, y_0) το $f(x, y)$ πλησιάζει το L.

- Ο ορισμός είναι διαισθητικός. Για την αυστηρή διατύπωση χρησιμοποιήστε την βιβλιογραφία.
- Θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν για τα όρια συναρτήσεων δύο μεταβλητών (και για αυτά κατά μήκος καμπύλης).

Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f + g)(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)$$

Θεώρημα

Αν $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ *τότε* $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ C}} f(x,y) = L$ *για κάθε καμπύλη* C *που διέρχεται από το* (x_0, y_0).

- Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- Το θεώρημα συνεπάγεται ότι αν το όριο είναι διαφορετικό κατά μήκος δύο καμπυλών ή το όριο κατά μήκος μίας καμπύλης δεν υπάρχει, τότε το όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται **συνεχής στο** (x_0, y_0) αν ορίζεται στο (x_0, y_0) και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ανοικτού συνόλου D τότε λέγεται **συνεχής στο** D.

Χωρίς απόδειξη θα θεωρήσουμε ότι

- πολυωνυμικές, ρητές, εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές,
- πράξει συνεχών συναρτήσεων

είναι συνεχείς.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{1+x^2+y^2}$.

Οι ορισμοί των ορίων και της συνέχειας δίνονται αντίστοιχα και για συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.