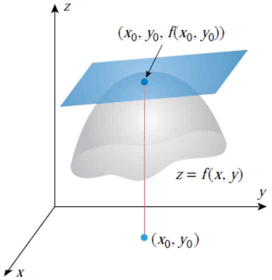
4.4 Παραγώγιση

Όταν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$ τότε:

1. είναι συνεχής στο x_0,
2. έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$,
3. έχει γραμμική προσέγγιση την εφαπτομένη κοντά στο x_0.

Θέλουμε να γενικεύσουμε σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.
Θυμίζουμε ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν αρκεί αφού είδαμε ότι δεν συνεπάγεται συνέχεια.

- Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ για την οποία θέλουμε ένα εφαπτόμενο επίπεδο $z - f(x_0, y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- Θα πάρουμε το επίπεδο που ορίζεται από τις εφαπτομένες της $f(x, y)$ στην κατεύθυνση x και y, δηλαδή τις ευθείες που περιέχουν το σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ και είναι παράλληλες στα διανύσματα $\vec{v_1} = i + 0j + f_x(x_0, y_0)k$ και $\vec{v_2} = 0i + j + f_y(x_0, y_0)k$ αντίστοιχα.



- Το επίπεδο θα είναι κάθετο στο διάνυσμα

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j - k.$$

- Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο, εφόσον υπάρχει, πρέπει να έχει εξίσωση

$$\boxed{z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)}$$

- Αφού ορίσουμε τι θα πει παραγωγίσιμη συνάρτηση, αυτό το επίπεδο θα ονομαστεί **εφαπτόμενο επίπεδο της** f **στο σημείο** (x_0, y_0).

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται **παραγωγίσιμη** στο (x_0, y_0) αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$$

- Ισοδύναμα, ο ορισμός λέει ότι $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y) - P}{||(x,y)-(x_0,y_0)||} = 0$, όπου P το επίπεδο που ορίστηκε προηγουμένως.
- Δηλαδή η f προσεγγίζεται κοντά στο (x_0, y_0) από το επίπεδο P.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ λέγεται παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0,z_0) αν

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)-f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)-f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)}{||(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)||}=0$$

Το παρακάτω θεώρημα ισχύει για όλες τις διαστάσεις.

Θεώρημα

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Κριτήριο παραγωγισιμότητας

Θεώρημα

Αν οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης υπάρχουν και είναι συνεχείς σε ένα σημείο, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $f(x, y, z) = x + yz$ είναι παραγωγίσιμη.