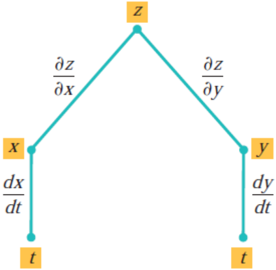
Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 1η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* t *και η* $z = f(x, y)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(x, y) = (x(t), y(t))$ *τότε η* $z = f(x(t), y(t))$ *είναι παραγωγίσιμη στο* t *και*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$



Παράδειγμα

Αν $z = x^2 y$, $x = t^2$ και $y = t^3$, να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dz}{dt}$.

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 1η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ *είναι παραγωγίσιμες στο* t *και η* $w = f(x, y, z)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ *τότε η* $w = f(x(t), y(t), z(t))$ *είναι παραγωγίσιμη στο* t *και*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

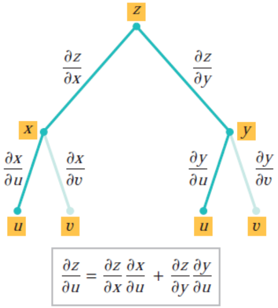
Παράδειγμα

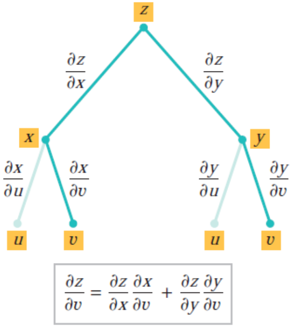
Αν $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ και $z = \tan\theta$, να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dw}{d\theta}$ για $\theta = \pi/4$.

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 2η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(u,v)$, $y(u,v)$ έχουν μερικές παραγώγους στο (u,v) και η $z = f(x,y)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$ τότε η $z = f(x(u,v), y(u,v))$ έχει μερικές παραγώγους στο (u,v) και

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \textit{και} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

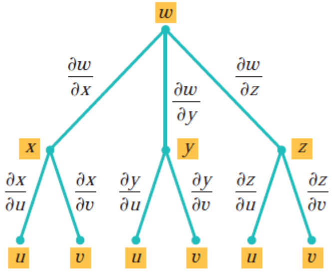




Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 2η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *έχουν μερικές παραγώγους στο* (u, v) *και η* $w = f(x, y, z)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ *τότε η* $w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ *έχει μερικές παραγώγους στο* (u, v) *και*

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



Παράδειγμα

Αν $z = e^{xy}$, $x = 2u + v$, $y = \dfrac{u}{v}$, να βρεθούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

Παράδειγμα

Αν $w = e^{xyz}$, $x = 3u + v$, $y = 3u - v$, $z = u^2 v$, να βρεθούν οι $\dfrac{\partial w}{\partial u}$, $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

Παράδειγμα

Αν $w = xy + yz$, $x = 3u + v$, $y = \sin x$, $z = e^x$, να βρεθεί η $\dfrac{dw}{dx}$.

Θεώρημα (Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης)

Αν η εξίσωση $f(x,y)=c$ (όπου $c\in\mathbb{R}$) ορίζει την y ως συνάρτηση του x σε πεπλεγμένη μορφή τότε

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Αν $x^3 + y^2x - 3 = 0$, να βρεθεί η $\dfrac{dy}{dx}$.

Θεώρημα (Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης)

Αν η εξίσωση $f(x,y,z)=c$ (όπου $c\in\mathbb{R}$) ορίζει την z ως συνάρτηση των x,y σε πεπλεγμένη μορφή τότε

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z} \quad \textit{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Αν $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, να βρεθούν οι η $\dfrac{\partial z}{dx}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.