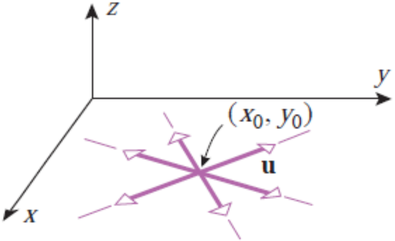
4.6 Παράγωγος κατά κατεύθυνση και κλίση

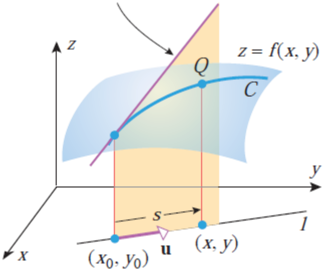
Είδαμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ εκφράζουν ρυθμό μεταβολής/κλίση εφαπτομένης στην κατεύθυνση του x ή y. Θέλουμε να γενικεύσουμε σε τυχαία κατεύθυνση.



Η κατεύθυνση στο xy-επίπεδο ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ με αρχή το σημείο (x_0, y_0). Η ευθεία που είναι παράλληλη στο $\vec{u}$ και διέρχεται από το (x_0, y_0) έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$L : x = x_0 + tu_1,\ y = y_0 + tu_2.$$

Αν περιορίσουμε την f στην ευθεία L παίρνουμε την συνάρτηση $f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$.



Ορισμός

Έστω $f(x, y)$ συνάρτηση και $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η **παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ στο** (x_0, y_0) συμβολίζεται με $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ και ορίζεται ως η παρακάτω παράγωγος, αν υπάρχει:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)]_{t=0}$$

Αντίστοιχος ορισμός δίνεται και για συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Ορισμός

Έστω $f(x, y, z)$ συνάρτηση και $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η **παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ στο** (x_0, y_0, z_0) συμβολίζεται με $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ και ορίζεται ως η παρακάτω παράγωγος, αν υπάρχει:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3)]_{t=0}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας μπορούμε να βρούμε απλούστερο τρόπο υπολογισμού.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f(x_0+tu_1, y_0+tu_2)]_{t=0} &= [\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}]_{t=0}\\ &= f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2\end{aligned}$$

Θεώρημα

- *Αν* $z = f(x,y)$ *παραγωγίσιμη στο* (x_0, y_0) *και* $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ *μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η* $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)$ *υπάρχει και*

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2.$$

- *Αν* $w = f(x,y,z)$ *παραγωγίσιμη στο* (x_0,y_0,z_0) *και* $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ *μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η* $D_{\vec{u}}f(x_0,y_0,z_0)$ *υπάρχει και*

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0,z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)u_1 + f_y(x_0,y_0,z_0)u_2 + f_z(x_0,y_0,z_0)u_3.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x, y) = e^{xy}$ στο $(-2, 0)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος που σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον θετικό άξονα των x.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z$ στο $(1, -2, 0)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2i + j - 2k$.

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) u_1 + f_y(x_0, y_0) u_2 \\
&= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (u_1, u_2)
\end{aligned}
$$

Ορισμός

- Αν $f(x, y)$ συνάρτηση, η **κλίση** της f συμβολίζεται με ∇f ή $\operatorname{grad} f$ ορίζεται ως
$$\nabla f = f_x(x, y) i + f_y(x, y) j$$
- Αν $f(x, y, z)$ συνάρτηση, η **κλίση** της f συμβολίζεται με ∇f ή $\operatorname{grad} f$ ορίζεται ως
$$\nabla f = f_x(x, y, z) i + f_y(x, y, z) j + f_z(x, y, z) k$$

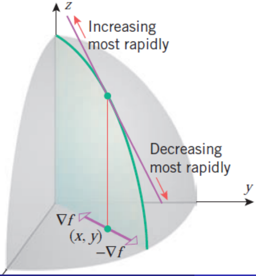
Ιδιότητες της κλίσης - Ι

Θεώρημα

Στο σημείο (x_0, y_0), *εάν* $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, *η* $z = f(x, y)$ *έχει*

- *μέγιστη κλίση εφαπτομένης/ρυθμό μεταβολής στην κατεύθυνση* $\nabla f(x_0, y_0)$ *η οποία είναι ίση με* $||\nabla f(x_0, y_0)||$ *και*
- *ελάχιστη κλίση εφαπτομένης/ρυθμό μεταβολής στην κατεύθυνση* $-\nabla f(x_0, y_0)$ *η οποία είναι ίση με* $-||\nabla f(x_0, y_0)||$.

(Το ίδιο και για τρεις μεταβλητές)



Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = x^2 e^y$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου στο $(-2,0)$ και το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει αυτήν την κατεύθυνση.

Ιδιότητες της κλίσης - II

Θεώρημα

Έστω $f(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό δίσκο με κέντρο (x_0, y_0) και $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Τότε το διάνυσμα $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης της f που διέρχεται από το (x_0, y_0).

(Το ίδιο και για τρεις μεταβλητές)
Απόδειξη: