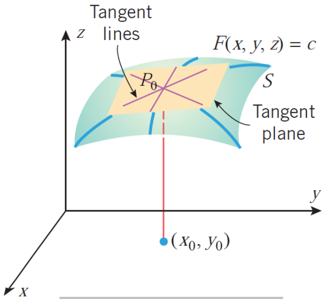
4.7 Εφαπτόμενο επίπεδο

Θέλουμε να ορίσουμε το εφαπτόμενο επίπεδο σε σημείο P_0 μια επιφάνειας της μορφής

$$F(x, y, z) = c$$

δηλαδή σε επιφάνεια στάθμης μίας συνάρτησης $F(x, y, z)$.

- Θα υποθέσουμε ότι η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους (αυτό κάνει την επιφάνεια **λεία** ώστε να δέχεται εφαπτόμενο επίπεδο).
- Το εφαπτόμενο επίπεδο πρέπει να περιέχει όλες τις εφαπτομένες καμπυλών της επιφάνειας που διέρχονται από το P_0.



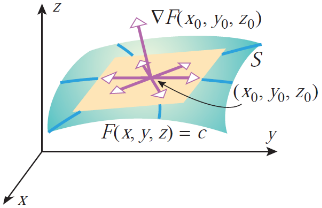
- Έστω μία καμπύλη πάνω στην επιφάνεια που διέρχεται από το P_0 σε χρόνο t_0 με παραμέτρηση $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$.
- Η εφαπτομένη της $r(t)$ στο t_0 είναι η ευθεία L που διέρχεται από το P_0 και είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$r' = x'(t_0)i + y'(t_0)j + z'(t_0)k.$$

Πρόταση

Το διάνυσμα $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ είναι κάθετο στην ευθεία L.

Απόδειξη:



Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ ως το κάθετο διάνυσμα που θα ορίσει το εφαπτόμενο επίπεδο.

Ορισμός

Έστω $F(x, y, z)$ συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους και $P_0(x_0, y_0, z_0)$ σημείο της επιφάνειας στάθμης $F(x, y, z) = c$. Αν $\vec{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ τότε:

- το $\vec{n}$ καλείται **κάθετο διάνυσμα** της επιφάνειας στο P_0,
- το **εφαπτόμενο επίπεδο** της επιφάνειας στο P_0 ορίζεται ως το επίπεδο με εξίσωση

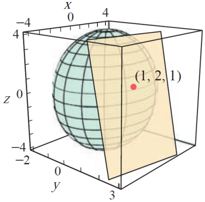
$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

- η **κάθετη ευθεία** της επιφάνειας στο P_0 είναι η παραμετρική ευθεία $x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)t,\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)t,\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)t$.

Παράδειγμα

Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$.

- Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(1, 2, 1)$.



Παράδειγμα

Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$.

- Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης ευθείας στο $(1, 2, 1)$.

Παράδειγμα

Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$.

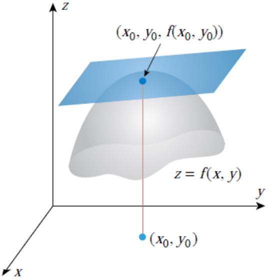
- Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(1, 2, 1)$ με το xy-επίπεδο.

Θεώρημα

Αν η $f(x,y)$ *είναι παραγωγίσιμη στο* (x_0, y_0) *τότε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματός της στο* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *είναι το επίπεδο με εξίσωση*

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Απόδειξη:



Παράδειγμα

Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο και η κάθετη ευθεία του γραφήματος της $z = x^2 y$ στο σημείο $(1, 2, 4)$.