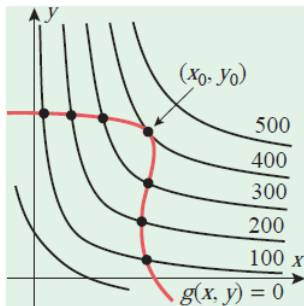


## 4.9 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα εύρεσης μέγιστου/ελαχίστου συνάρτησης  $z = f(x, y)$  υπό την συνθήκη  $g(x, y) = 0$ .

### Παράδειγμα

Εύρεση ελάχιστου εμβαδού επιφάνειας κουτιού με δοσμένο όγκο.



## Θεώρημα

Έστω  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό σύνολο που περιέχει την καμπύλη  $g(x, y) = 0$  έτσι ώστε  $\nabla g \neq \vec{0}$  στο σύνολο αυτό. Αν η  $f$  έχει τοπικό ακρότατο σε σημείο  $(x_0, y_0)$  της καμπύλης  $g(x, y) = 0$  τότε,

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Γεωμετρικά, το θεώρημα συνεπάγεται ότι τα  $\nabla f(x_0, y_0)$ ,  $\nabla g(x_0, y_0)$  είναι παράλληλα.
- Το  $\lambda$  λέγεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**.



## Παράδειγμα

Να βρεθεί σε ποιά σημεία του κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$  λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή η συνάρτηση  $f(x, y) = xy$ .

## Παράδειγμα

Να βρεθεί σε ποιά σημεία του κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$  λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή η συνάρτηση  $f(x, y) = xy$ .

## Παράδειγμα

Να βρεθεί ορθογώνιο με δοσμένη περίμετρο  $p$  και μέγιστο εμβαδό.

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange εφαρμόζονται και σε συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

### Θεώρημα

Έστω  $f(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z)$  συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό σύνολο που περιέχει την επιφάνεια  $g(x, y, z) = 0$  έτσι ώστε  $\nabla g \neq \vec{0}$  στο σύνολο αυτό. Αν η  $f$  έχει τοπικό ακρότατο σε σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  της επιφάνειας  $g(x, y, z) = 0$  τότε,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

για κάποιο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## Παράδειγμα

Να βρεθούν τα σημεία της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  με μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $(1, 2, 2)$ .



## Παράδειγμα

Να βρεθούν τα σημεία της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  με μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από το σημείο  $(1, 2, 2)$ .

## Παράδειγμα

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου κουτιού χωρίς καπάκι με όγκο  $32 \text{ cm}^3$  με ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.

## Παράδειγμα

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου κουτιού χωρίς καπάκι με όγκο  $32 \text{ cm}^3$  με ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.