ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΣ026

Α. Συστήματα συντεταγμένων

Μετατροπή		Τύποι		Περιορισμοί
Πολικές σε καρτεσιανές	$(r,\theta) \to (x,y)$	$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$	$r \geq 0$,
Καρτεσιανές σε πολικές	$(x,y) \to (r,\theta)$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Μετατροπή		Τύποι			Περιορισμοί
Κυλινδρικές σε Καρτεσιανές	$(r,\theta,z) \to (x,y,z)$	$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$	$z = z$	$r \geq 0$
Καρτεσιανές σε Κυλινδρικές	$(x,y,z) \to (r,\theta,z)$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$z = z$	$\rho \geq 0$
Σφαιρικές σε Καρτεσιανές	$(\rho,\theta,\phi) \to (x,y,z)$	$x = \rho\cos\theta\sin\phi$	$y = \rho\sin\theta\sin\phi$	$z = \rho\cos\phi$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
Καρτεσιανές σε Σφαιρικές	$(x,y,z) \to (\rho,\theta,\phi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$\cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$0 \leq \phi \leq \pi$

Β. Κωνικές Τομές

Κύκλος	$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$	κέντρο (x_0, y_0), ακτίνα r
Παραβολή	$y^2 = \pm 4px$	ανοίγει στην $\pm x$ κατεύθυνση
$(p > 0)$	$x^2 = \pm 4py$	ανοίγει στην $\pm y$ κατεύθυνση
Έλλειψη	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	μεγάλος άξονας στην x κατεύθυνση
$(a > b > 0)$	$x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$	μεγάλος άξονας στην y κατεύθυνση
Υπερβολή	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$	ανοίγει στην x κατεύθυνση
$(a > 0, b > 0)$	$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$	ανοίγει στην y κατεύθυνση

Γ. Τετραγωνικές επιφάνειες

Σφαίρα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα r: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

Εξίσωση	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$z^2-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	$z-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	$z-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{a^2}=0$
Ταξινόμηση	Ελλειψοειδές	Μονόχωνο υπερβολοειδές	Δίχωνο υπερβολοειδές	Ελλειπτικός κώνος	Ελλειπτικό παραβολοειδές	Υπερβολικό παραβολοειδές

Δ. Ευθείες και επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$

Δ.1. Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (a, b, c)$.

Διανυσματική εξίσωση	$\vec{r} = \vec{OP} + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$
Παραμετρικές εξισώσεις	$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct,\ t \in \mathbb{R}$
Συμμετρικές εξισώσεις	$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

Δ.2. Επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (a, b, c)$

Διανυσματική εξίσωση	$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{OP}) = 0$
Καρτεσιανή εξίσωση	$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ή $ax + by + cz + d = 0$

Δ.3. Απόσταση σημείου $P(x_0, y_0, z_0)$ από επίπεδο $ax + by + cz + d = 0$.

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Δ.4. Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας σε σημείο (x_0, y_0, z_0)

Είδος επιφάνειας	Εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου
Γράφημα συνάρτησης $z = f(x, y)$	$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$
Επιφάνεια $F(x, y, z) = c$	$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Ε. Τύποι μήκους, εμβαδού και όγκου

Ε.1. Μήκος καμπύλης

$r(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \le t \le b)$	$\int_a^b \|r'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$
$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \le t \le b)$	$\int_a^b \|r'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$

Ε.2. Εμβαδόν και όγκος

Εμβαδόν χωρίου D στο xy-επίπεδο	$\iint_D 1 \, dA$
Εμβαδόν επιφάνειας $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$	$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA$
Όγκος στερεού G	$\iiint_G 1 \, dV$

ΣΤ. Γνωστά ολοκληρώματα

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2} \, dx = \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{a}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + a}{x - a} \right|$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left(\sqrt{a^2 + x^2} + x\right)$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \sec^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$