15/09

Ορισμός:
Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, το ίχνος του A, trA, είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Π.χ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $trA = 1+4 = 5$

Ανάστροφος πίνακας:
Αν ο A είναι m×n πίνακας τότε ο ανάστροφος του συμβολίζεται με A^T και είναι ο n×m πίνακας που προκύπτει κάνοντας τις γραμμές του A στήλες και τις στήλες του A σε γραμμές.

Π.χ: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

* Άρα αν $A = (a_{ij})$ τότε $A^T = (a_{ji})$

Ιδιότητες

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
3) $(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R})$
4) $(AB)^T = B^T A^T$

Ειδικοί Τετραγωνικοί Πίνακες:

1) **Διαγώνιος πίνακας:** Κάθε στοιχείο εκτός της κύριας διαγωνίου είναι $=0$.

Π.χ: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, I_n

2) **Άνω τριγωνικός:** Κάθε στοιχείο κάτω από την κύρια διαγώνιο $=0$.

Π.χ: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

3) **Κάτω τριγωνικός:** Όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο $=0$

Π.χ: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

4) **Συμμετρικός:** $A=A^T$

Δηλαδή, η κύρια διαγώνιος είναι άξονας συμμετρίας.

Π.χ: $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

5) **Αντισυμμετρικός:** $A=-A^T$

- Στοιχεία κύριας διαγωνίου $=0$
- Συμμετρικά στοιχεία αντίθετα.

Π.χ: $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $A^T=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Ιδιότητες:

1) Ο ανάστροφος ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι κάτω τριγωνικός.
2) Ο ανάστροφος ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός.
3) Αν ο A είναι συμμετρικός τότε και ο A^T είναι συμμετρικός.
$$(A^T)^T = A = A^T$$
4) Αν οι A, B είναι συμμετρικοί τότε και οι $A \pm B$ είναι συμμετρικοί.
5) Αν ο A είναι συμμετρικός και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε και ο λA είναι συμμετρικός.

Παρατήρηση:

Είναι πιθανόν οι A, B να είναι συμμετρικοί ενώ ο $A \cdot B$ να μην είναι συμμετρικός.

Π.χ.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^T = A$, $B^T = B$

$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad AB^T \neq AB$

Θεώρημα:

Έστω A, B συμμετρικοί τριγωνικοί πίνακες. Ο AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} AB \text{ συμμετρικός} &\Leftrightarrow (AB)^T = AB && \text{(ορισμός)} \\ &\Leftrightarrow B^T A^T = AB && \text{(ιδιότητες ανάστροφος)} \\ &\Leftrightarrow BA = AB && \text{(AB συμμετρικοί)} \end{aligned}$$

Θεώρημα:
Αν A, B είναι συμμετρικοί τετραγωνικοί πίνακες τότε ο $AB-BA$ είναι αντισυμμετρικός.

Απόδειξη:

$$(AB-BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T$$
$$= BA - AB = -(AB-BA)$$

Αντιστρέψιμοι πίνακες:

Ορισμός:
Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται αντιστρέψιμος αν υπάρχει πίνακας B ιδίων διαστάσεων ώστε: $AB = BA = I$, ο B συμβολίζεται με A^{-1}.

π.χ.: Ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

διότι: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες που δεν είναι αντιστρέψιμοι.

π.χ.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, B οποιοσδήποτε πίνακας 3×3 ο BA έχει μηδενικά στην τρίτη στήλη.

Ορισμός:
Ένας πίνακας που δεν είναι αντιστρέψιμος λέγεται ιδιάζων.

Θεώρημα: (μοναδικότητα του αντιστρόφου)
Ο αντίστροφος ενός πίνακα υπάρχει και είναι μοναδικός.

Θεώρημα: (αντίστροφος 2x2 πίνακα)

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$ad - bc \neq 0$ και $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

π.χ.: $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

Ο A είναι αντιστρέψιμος, αφού $6 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 7 \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -5/7 & 6/7 \end{pmatrix}$

Ο B δεν είναι αντιστρέψιμος, αφού $(-1)(-6) - 2 \cdot 3 = 0$

Ορισμός:

Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται ορθογώνιος αν $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

δηλ. A^T είναι αντίστροφος του A.

* αποδεικνύεται ότι μια από τις δύο ιδιότητες αρκεί.

π.χ.: $A = \begin{pmatrix} -3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} -3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & 2/7 & -3/7 \end{pmatrix}$

$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Άρα ο A είναι ορθογώνιος