5/4/2020 Παρατήρηση

- Είναι πιθανόν για δύο πίνακες A, B $A \neq \mathbb{O}$ και $B \neq \mathbb{O}$ ενώ $AB = \mathbb{O}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$

- Ορισμός:

Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, το ίχνος του A, trA, είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $trA = 1+4 = 5$

- Ανάστροφος πίνακας:

Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε ο ανάστροφος πίνακας του συμβολίζεται με A^T και είναι ο $n \times m$ πίνακας που προκύπτει κάνοντας τις γραμμές του A στήλες και τις στήλες του A γραμμές

Άρα αν $A = [a_{ij}]$ τότε $A^T = [a_{ji}]$

π.χ. • $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

• $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

• Ιδιότητες

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

4) $(AB)^T = B^T A^T$

• Ειδικοί τετραγωνικοί πίνακες

1) Διαγώνιος: κάθε στοιχείο έκτος της κύριας διαγωνίου είναι ίσο με μηδέν.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2) Άνω τριγωνικός: κάθε στοιχείο κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

3) Κάτω τριγωνικός: κάθε στοιχείο πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδεν

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

4) Συμμετρικός: $A = A^T$ → δηλαδή η κύρια διαγώνιος είναι άξονας συμμετρίας.

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

5) Αντισυμμετρικός: $A = -A^T$ → στοιχεία κύριας διαγωνίου ίσα με μηδέν και συμμετρικά στοιχεία αντίθετα

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^T = A$

• Ιδιότητες:

1) Ο ανάστροφος ενός άνω τριγωνικού πίνακα είναι κάτω τριγωνικός.

2) Ο ανάστροφος ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός

3) Αν ο A είναι συμμετρικός τότε και ο A^T είναι συμμετρικός.

$(A^T)^T = A = A^T$

4) Αν οι A, B είναι συμμετρικοί τότε και οι $A \pm B$ είναι συμμετρικοί.

5) Αν ο A είναι συμμετρικός και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε και ο λA είναι συμμετρικός.

• Παρατήρηση: Είναι πιθανόν οι A, B να είναι συμμετρικοί ενώ ο AB να μην είναι συμμετρικός

$$\text{π.χ. } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A, \; B^T = B$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}, \; AB^T \neq AB$$

• Θεώρημα: Έστω A, B συμμετρικοί τετραγωνικοί πίνακες. Ο AB είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνο αν $AB = BA$.

• Απόδειξη:

AB συμμετρικός $\iff (AB)^T = AB$ (ορισμός)

$\iff B^T A^T = AB$ (ιδιότητες ανάστροφου)

$\iff BA = AB$ (A, B συμμετρικοί)

• Θεώρημα: Αν A, B είναι συμμετρικοί τετραγωνικοί πίνακες τότε ο $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός.

• Απόδειξη: $(AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T = B^T A^T - A^T B^T$

$= BA - AB = -(AB - BA)$

• Αντιστρέψιμοι πίνακες

• Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται αντιστρέψιμος αν υπάρχει B ίδιων διαστάσεων ώστε $AB = BA = I$

• Ο B συμβολίζεται με A^{-1}

• π.χ. ο $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

διότι $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Παρατήρηση: Υπάρχουν τετραγωνικοί πίνακες που δεν είναι αντιστρέψιμοι π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

διότι αν B οποιοσδήποτε 3×3 πίνακας ο BA έχει μηδενικά στην τρίτη στήλη

• Ένας πίνακας που δεν είναι αντιστρέψιμος λέγεται ιδιάζων.

• <u>Θεώρημα:</u> (μοναδικότητα του αντιστρόφου)

Ο αντίστροφος ενός πίνακας A αν υπάρχει είναι μοναδικός.

• <u>Θεώρημα:</u> (αντίστροφος 2×2 πίνακα)

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$ad - bc \neq 0$

και $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

• Ο A είναι αντιστρέψιμος διότι:

$6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 7 \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -5/7 & 6/7 \end{bmatrix}$

• Ο B δεν είναι αντιστρέψιμος διότι: $(-1)(-6) - 2 \cdot 3 = 0$

• Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται ορθογώνιος αν

$$AA^T = A^TA = I \; *$$

δηλαδή A^T είναι ο αντίστροφος του A.

* αποδεικνύεται ότι μια από τις δύο ιδιότητες αρκεί.

π.χ. • $A = \begin{bmatrix} -3/7 & 2/7 & 6/7 \\ -6/7 & 3/7 & 2/7 \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 \end{bmatrix}$

• $A^T = \begin{bmatrix} -3/7 & -6/7 & 2/7 \\ 2/7 & 3/7 & 6/7 \\ 6/7 & 2/7 & -3/7 \end{bmatrix}$

• $A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ άρα ο A είναι ορθογώνιος.