25/9/20 **Α αντιστρέψιμος**

$A \sim I_n$

$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$

π.χ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ Άρα ~~η~~ Α δεν είναι αντιστρέψιμος

Άσκηση: Να βρεθούν όλοι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες 3x3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 2 - Γραμμικά συστήματα

Ορισμοί:

• Σύνολο λύσεων είναι το σύνολο των διατεταγμένων $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ώστε η αντικατάσταση $x_1 = \xi_1, \ldots x_n = \xi_n$ να ικανοποιεί τις εξισώσεις του συστήματος.

• Αν $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ το σύστημα λέγεται ομογενές

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

• Το ομογενές σύστημα έχει πάντα λύση ίση την $(0, 0, \ldots 0)$ την οποία ονομάζουμε τετριμμένη λύση.

• Ένα σύστημα λέγεται συμβιβαστό αν έχει υπάρχει τουλάχιστον μία λύση.

• Δύο συστήματα είναι ισοδύναμα αν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

• Είδαμε ότι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ των εξισώσεων αντιστοιχούν σε γραμμοπράξεις.

• Άρα οι γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα δεν επηρεάζουν το σύνολο λύσεων (είναι ισοδύναμα συστήματα)

• Στα γραμμικά συστήματα ενδιαφερόμαστε για
1) Ύπαρξη (τουλάχιστον μιας λύσης)
2) Μοναδικότητα (αν υπάρχει μοναδική λύση)

• Θεώρημα

• Για ένα γραμμικό σύστημα υπάρχουν μόνο τρεις περιπτώσεις

(1) καμία λύση
(2) υπάρχει μοναδική λύση
(3) υπάρχουν άπειρες λύσεις

• Επίλυση με απαλοιφή

Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:
1) σε κλιμακωτό και μετά κάνουμε πίσω αντικατάσταση

ή

2) σε ανηγμένο κλιμακωτό:
(1) $\longleftrightarrow$ απαλοιφή Gauss
(2) $\longleftrightarrow$ απαλοιφή Gauss-Jordan

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα → Gauss

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad\quad + 2x_5 \quad\quad &= 0 \\
2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\
5x_3 + 10x_4 \quad\quad + 15x_6 &= 5 \\
2x_1 + 6x_2 \quad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6
\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\
2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6
\end{array}\right] \longrightarrow$$

$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_2,\; R_4 \to R_4 - 4R_2]{R_2 \to -R_2}$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{6} R_3]{R_3 \leftrightarrow R_4}$
$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
→ ηγεμαωτός

→ κύριες μεταβλητές, οι υπόλοιπες είναι ελεύθερες μεταβλητές

Πίσω αντικατάσταση

$x_6 = 1/3$

$x_3 + 2x_4 + 3x_6 = 1 \Rightarrow x_3 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_4$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 = 0 \Rightarrow x_1 + 3x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$
$\Rightarrow x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 = 0$

- Τα x_2, x_4, x_5 δεν αντιστοιχούν σε ηγετικό 1 $\Rightarrow$ είναι ελεύθερες μεταβλητές. Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-3x_2 - 4x_4 - 2x_5, x_2, -2x_4, x_4, x_5, 1/3)$

Παράδειγμα: Το ίδιο για το σύστημα → Jordan

$$x_1+2x_2-2x_3+3x_4=5$$
$$2x_1+4x_2+x_3+x_4=10$$
$$x_1+x_2+x_3-2x_4=0$$
$$-x_1-x_2+2x_3+3x_4=8$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{5} R_3]{R_3 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_4 \to \frac{1}{4} R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -9 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 6R_4 \\ R_3 \to R_3 + R_4}]{R_1 \to R_1 + 11R_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Άρα $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=2$

οπότε μία μόνο λύση $(1,1,2,2)$