09/10

$v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$

Υπενθ:

- Γραμμικοί συνδιασμοί των $v_1, v_2, \ldots, v_m$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$$

- Span $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ = όλοι οι γραμ. συνδιασμοί των $v_1, v_2, \ldots, v_m$
- $[v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_m \mid b]$ έχει λύση.

$$\Leftrightarrow b \in \text{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

$$\Leftrightarrow b \in \text{col}(A)$$

<u>Ορισμός:</u>

- Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_m$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Τα $v_1, v_2, \ldots, v_m$ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα αν ισχύει η εξίσωση.

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m = 0 \quad (x_i \in \mathbb{R})$$

έχει μόνο την τετριμμένη λύση $(x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0)$

- Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν τα διανύσματα του S είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Αν ισχύει τα παραπάνω τα $v_1, v_2, \ldots, v_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα

<u>π.χ:</u>

Έστω $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Το $\{i, j\}$ είναι γραμ. ανεξάρτητο

$$x_1 i + x_2 j = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 0$$

Το $\{i, j, w\}$ είναι γραμ. εξαρτημένο, διότι

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j - w = 0$$

Άρα η εξίσωση $x_1 i + x_2 j + x_3 w = 0$ έχει μη τετριμμένες λύσεις (π.χ. $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = x_2$, $x_3 = -1$)

Διαφορετικά θα μπορούσαμε να το διαπιστώσουμε με την εξίσωση $x_1 i + x_2 j + x_3 w = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 1/\sqrt{2}\, x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 + 1/\sqrt{2} \cdot x_3 = 0$$

Προέκυψε ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους απ' ότι εξισώσεις $\Rightarrow$ άπειρες λύσεις

$\Rightarrow$ μη τετριμμένες λύσεις.

<u>Θεώρημα:</u>

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$

1. Το $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο
2. Η εξίσωση $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m = 0$ ($x_i \in \mathbb{R}$) έχει μόνο τη τετριμμένη λύση.
3. Αν A ο πίνακας με στήλες $v_1, v_2, \dots, v_m$, το γραμμικό σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

Παράδειγμα:

Να προσδιοριστεί αν το σύνολο $\{V_1, V_2, V_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όπου:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Λύση:

Από το Θεώρημα κοιτάμε αν ο παρακάτω επαυξημένος πίνακας δίνει μη τετριμμένες λύσεις.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις $\Rightarrow$ μη τετριμμένες λύσεις.
Άρα το $\{V_1, V_2, V_3\}$ είναι γραμμ. εξαρτημένο.
Οι λύσεις του ομογενούς συστήματος είναι:

$$X_2 + X_3 = 0 \Rightarrow X_2 = -X_3$$
$$X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 0 \Rightarrow X_1 = 2X_3$$

Άρα $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_3 \\ -X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = X_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

π.χ.:

για $X_3 = 1$ παίρνουμε την λύση $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, δηλ. $2V_1 - V_2 + V_3 = 0$

Θεώρημα:

Οι στήλες ενός πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $A \cdot X = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

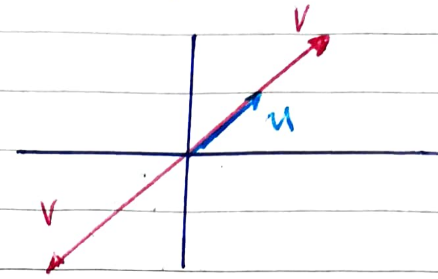
$A \cdot X = b$ έχει λύση $\Leftrightarrow b \in col(A)$
$A \cdot X = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\Leftrightarrow$ στήλες του A είναι γραμμ. ανεξάρτητες

Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής ανεξαρτησίας:

1) Έστω $\{u, v\}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

Αν u, v είναι γραμμ. εξαρτημένα, υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0$ και $x_1 u + x_2 v = 0$

Αν π.χ. $x_1 \neq 0$, $u = -\frac{x_2}{x_1} v$



Το ίδιο και στον $\mathbb{R}^n$:

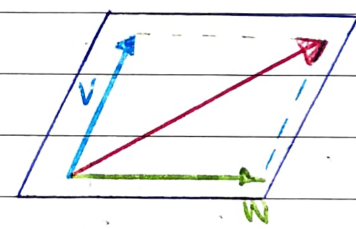
$\{u, v\}$ γρ. εξαρτημένο $\Leftrightarrow$ u πολ/σιο του v

2) Έστω $\{u, v, w\}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$.

$\{u, v, w\}$ γραμμ. εξαρτημένο $\Leftrightarrow$ υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ όχι όλα $= 0$, $x_1 u + x_2 v + x_3 w = 0$

Αν π.χ. $x_1 \neq 0$, $u = -\frac{x_2}{x_1} v - \frac{x_3}{x_1} w$

$\Rightarrow$ ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα v, w



Άρα u, v, w στο $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμ. εξαρτημένα αν και μόνο αν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο

Θεώρημα:

Έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $r > n$ τότε το $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ είναι γρ. εξαρτημένο.

Απόδειξη:

$\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ γραμμικά ανεξάρτητο αν $[v_1 \; v_2 \ldots v_r \mid 0]$ έχει μόνο τετριμμένη λύση.

Πίνακας με r στήλες και n γραμμές $r > n$

$\Rightarrow$ περισσότεροι άγνωστοι απ' ότι εξισώσεις.

$\Rightarrow$ άπειρες λύσεις (μη τετριμμένες).

Παρατηρήσεις:

1) Αν το σύνολο $S \leq \mathbb{R}^n$ περιέχει το $\mathbb{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$, τότε το S είναι γραμμικά εξαρτημένο.

π.χ.: αν $v_1, v_2, \dots, v_m \in S$

$$0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_m + 600\,\mathbb{0} = \mathbb{0}$$

2) Αν το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, υπάρχει v_i που είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.