9/10/20

Υπενθύμιση: γραμ. συνδυασμοί των $v_1, v_2, \dots, v_m$

$\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \dots + \xi_m v_m$

- $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ = όλοι γραμ. συνδυασμοί των $v_1, v_2, \dots, v_m$

- $[\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_m}_{A} | b]$ έχει λύση

$\Leftrightarrow b \in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

$\Leftrightarrow b \in \mathrm{Col}(A)$

Ορισμός: Έστω $v_1, v_2, \dots, v_m$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Τα $v_1, v_2, \dots, v_m$ λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα αν η εξίσωση $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m = 0$ $(x_i \in \mathbb{R})$ έχει μόνο την τετριμμένη μηδενική λύση $(x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0)$

- Ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^n$ λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν τα διανύσματα του S είναι γραμμικά ανεξάρτητα

- Αν δεν ισχύει το παραπάνω τα $v_1, \dots, v_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα.

π.χ. Έστω $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Το $\{i, j\}$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.

$x_1 i + x_2 j = 0$

$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$ και $x_2 = 0$

• Το $\{i, j, w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο διότι

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j - w = 0$$

• Άρα η εξίσωση $x_1 i + x_2 j + x_3 w = 0$ έχει μη τετριμμένη λύση (π.χ. $x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = -1$

• Διαφορετικά θα μπορούσαμε να το διατυπώσουμε με την εξίσωση: $x_1 i + x_2 j + x_3 w = 0$

$$\Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 + 1/\sqrt{2}\, x_3 &= 0 \\ x_2 + 1/\sqrt{2}\, x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Προκύπτει ομογενές σύστημα με περισσότερους αγνώστους παρά λύσεις άρα $\Rightarrow$ άπειρες λύσεις
$\Rightarrow$ μη τετριμμένες λύσεις

Θεώρημα: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$

(1) Το $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

(2) [ορισμός] Η εξίσωση $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m = 0$ $(x_i \in \mathbb{R})$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

(3) Αν A ο πίνακας με στήλες $v_1, v_2, \ldots, v_m$ το γραμμικό σύστημα $AX = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

π.χ. Να προσδιοριστεί αν το σύνολο $\{V_1, V_2, V_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, όπου

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• Από το θεώρημα κοιτάμε αν ο παρακάτω επαυξημένος πίνακας δίνει μη τετριμμένες λύσεις

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις $\Rightarrow$ μη τετριμμένες λύσεις

Άρα το $\{V_1, V_2, V_3\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

• Οι λύσεις του ομογενούς συστήματος είναι:

$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_3$

Άρα: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

π.χ. για $x_3 = 1$ παίρνουμε την λύση $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

δηλαδή $2V_1 - V_2 + V_3 = 0$.

Θεώρημα: Οι στήλες ενός πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.

αναφέρεται στην λύση όπου όλοι οι αγνώστοι είναι ίσοι με μηδέν

$Ax = b$ έχει λύση $\Leftrightarrow b \in Col(A)$

$Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\Leftrightarrow$ στήλες του A γραμμ. ανεξ.

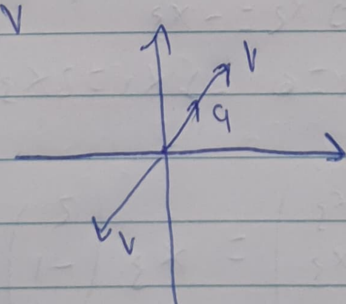
Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής ανεξαρτησίας:

1) Έστω $\{a, v\}$ διανύσματα του R^2

Αν a, v είναι γραμ. εξαρτημένα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$

$x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0$ και $x_1 a + x_2 v = 0$

Αν π.χ. $x_1 \neq 0$, $a = \dfrac{-x_2 v}{x_1}$



• Το ίδιο και στον R^n:

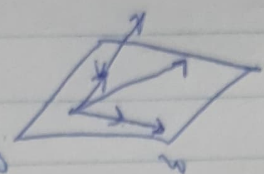
$\{a, v\}$ γραμ. εξαρτημένο $\Leftrightarrow$ a πολλαπλάσιο του v.

2) - Έστω $\{a, v, w\}$ διανύσματα στον R^3.

$\{a, v, w\}$ γραμ. εξαρτημένο $\Leftrightarrow$ υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in R$

όχι όλα $= 0$ ώστε $x_1 a + x_2 v + x_3 = 0$

• Εάν π.χ. $x \neq 0$, $u = -\frac{x_2}{x_1} v - \frac{x_3}{x_1} w$



=> u ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα v, w.

• Αν u, v, w στον R^3 είναι γραμ. εξαρτημένα αν και μόνο α ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

Θεώρημα: Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ διανύσματα στον R^n.

Αν $r > n$ τότε το $\{v_1, v_2 \dots v_r\}$ είναι γραμ. εξαρτ.

Απόδειξη: $\{v_1, v_2, \dots v_r\}$ γραμμ. ανεξάρτητο

$[v_1\ v_2\ \dots\ v_r \mid 0]$ έχει μόνο τετραγμένη οδηγ. η επαυξημένη η τετριμμένη λύση πίνακας με n σειρές και n γραμμές $r > n$

=> Περισσότεροι άγνωστοι από τις εξισώσεις
=> άπειρες λύσεις (μη τετριμμένες)

Παρατηρήσεις:

1) Αν το σύνολο $S \subseteq R^n$ περιέχει το $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ τότε το S είναι γραμ. εξαρτημένο.
π.χ. αν $v_1, v_2 \dots v_m \in S$

$$0v_1 + 0v_2 + \dots 0v_m + 600 \cdot 0 = 0$$

2) Το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots v_r\}$ είναι γραμ. εξαρτ.

υπάρχει κάποιο διάνυσμα που είναι γραμ. συνδυασμός των υπολοίπων