Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος.

Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ λέγεται υπόχωρος του V αν το 0 του V ανήκει στο W και οι πράξεις (πρόσθεση, βαθμωτός πολλαπλασιασμός) του V κάνουν το W διανυσματικό χώρο.

Αντί να δείξουμε όλα τα αξιώματα των διαν. χώρων χρησιμοποιούμε το παρακάτω:

Θεώρημα: Έστω V διαν. χώρος και $\boxed{W \subseteq V}$. Το W είναι υπόχωρος του V αν ισχύουν:

αν $u, v \in W$ τότε $u + v \in W$
αν $u \in W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda u \in W$

Παραδείγματα

1. Έστω $V = \mathbb{R}^n$

Το υποσύνολο $W = \{0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

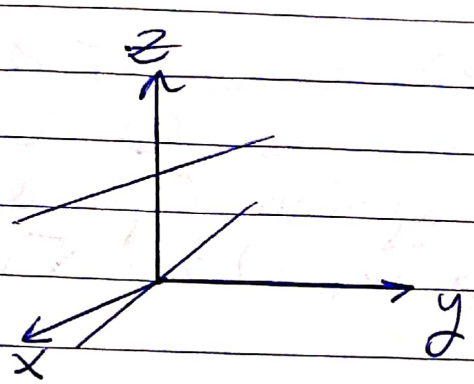
Το υποσύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

Τα $\{0\}$ και $\mathbb{R}^n$ λέγονται τετριμμένοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$

Ελένη Λοΐζου

(2) Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε ευθεία αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

⇒ Αν η ευθεία L περιέχει το 0 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$



⇒ Διαφορετικά δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

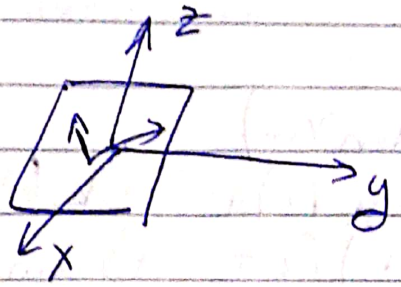
[Κάθε ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το O γράφεται και σαν:

$\{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$]

$\lambda \vec{v} + \nu \vec{v} = (\lambda + \nu)\vec{v} \in L$

$\kappa(\lambda \vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{v} \in L$

(3) Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$



Τέτοια επίπεδα γράφονται και σαν:

$$\{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

για κάποια διανύσματα $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$

$$(\lambda_1\vec{u}+\mu_1\vec{v})+(\lambda_2\vec{u}+\mu_2\vec{v})=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{u}+(\mu_1+\mu_2$$

$$k(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=(k\lambda)\vec{u}+(k\mu)\vec{v}$$

(4) Αν $v_1,\dots,v_m\in\mathbb{R}^n$ τότε το $\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_m\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_m\}=\{\lambda_1v_1+\dots+\lambda_mv_m \mid \lambda_i\in\mathbb{R}\}$$

Θα το αποδείξουμε με θεώρημα

Εάν $u,w\in\mathrm{Span}\{v_1,\dots,v_m\}$

$\Rightarrow$ Άρα $u=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_mv_m \quad (\lambda_i\in\mathbb{R})$

$w=k_1v_1+k_2v_2+\dots+k_mv_m \quad (k_i\in\mathbb{R})$

$$u+w=(\lambda_1v_1+\dots+\lambda_mv_m)+(k_1v_1+k_2v_2+\dots+k_mv_m)$$
$$=(\lambda_1+k_1)v_1+(\lambda_2+k_2)v_2+\dots+(\lambda_m+k_m)v_m$$
$$\in \mathrm{Span}\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$$

Έστω $u \in \text{Span}\{v_1, \dots v_m\}$

Άρα $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$
$(\lambda_i \in \mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
ku &= k(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) \\
&= k(\lambda_1 v_1) + k(\lambda_2 v_2) + \dots + k(\lambda_m v_m) \\
&= (k\lambda_1) v_1 + (k\lambda_2) v_2 + \dots + (k\lambda_m) v_m
\end{aligned}
$$

$\in \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$

(5) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το $Col(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$

(λόγω του (4) διότι $Col(A) = \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\}$)

$\downarrow$

στήλες του A

(6) ~~Αν~~ Αν ο A είναι $m\times n$ πίνακας τότε το σύνολο των $x\in\mathbb{R}^n$ ώστε $AX=0$ (το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

· Έστω X_1, X_2 λύσεις της $AX=0$

δηλ. $AX_1=0$ και $AX_2=0$

$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=0+0=0$

Άρα $\Rightarrow$ X_1+X_2 λύση της $Ax=0$

Αν $\lambda\in\mathbb{R}$
$A(\lambda X_1)=\lambda(AX_1)=\lambda 0=0$

Άρα λX_1, λύση της $AX=0$

Ορισμός: Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των λύσεων της $Ax = 0$

(δηλ. σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα A) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται μηδενικός χώρος ή μηδενοχώρος ή πυρήνας του A και συμβολίζεται με $Nul(A)$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Col(A) & & Nul(A) \end{tikzcd}$$

Ορισμός: Έστω $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το S λέγεται βάση του $\mathbb{R}^n$ αν:

1. $Span\{v_1, v_2 \dots v_m\} = \mathbb{R}^n$
2. S γραμμικά ανεξάρτητο

⊛ Παραδείγματα

(1) Έστω $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε δεί ότι ~~οι~~ $\text{Span}\{e_1, e_2, \ldots e_n\} = \mathbb{R}^n$
και είναι γραμμικά ανεξάρτητα
(γιατί;)

Άρα το $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$
και λέγεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

(2) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Θα δείξουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει ηγετικά στοιχεία σε κάθε γραμμή
Άρα $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$
($Ax = b \Rightarrow$ έχει λύση για κάθε b)
Επίσης δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές
(κάθε στήλη έχει ηγετικό 1)
Άρα γραμμ. ανεξάρτητα
($Ax = 0$ δίνει μοναδ. λύση την τετριμ.)
Άρα είναι βάση

Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος.

Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ λέγεται υπόχωρος του V αν το 0 του V ανήκει στο W και οι πράξεις (πρόσθεση, βαθμωτός πολλαπλασιασμός) του V κάνουν το W διανυσματικό χώρο.

Αντί να δείξουμε όλα τα αξιώματα του διαν. χώρου χρησιμοποιούμε το παρακάτω:

Θεώρημα: Έστω V διαν. χώρος και $\boxed{W \subseteq V}$. Το W είναι υπόχωρος του V αν ισχύουν:

αν $u, v \in W$ τότε $u + v \in W$

αν $u \in W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda u \in W$

Παραδείγματα

1. Έστω $V = \mathbb{R}^n$

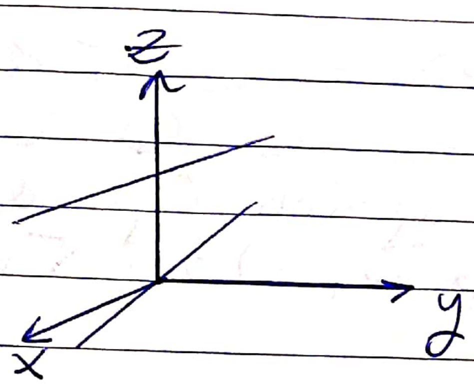
Το υποσύνολο $W = \{0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

Το υποσύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

Τα $\{0\}$ και $\mathbb{R}^n$ λέγονται τετριμμένοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$

Ελένη Λούσου

(2) Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε ευθεία αναπαριστά σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$



⇒ Αν η ευθεία L περιέχει το 0 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

⇒ Διαφορετικά δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

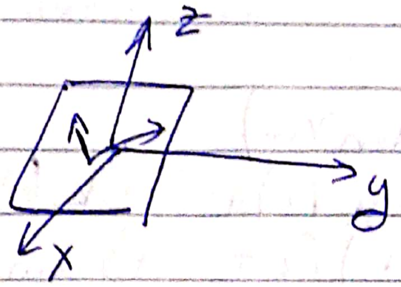
[Κάθε ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το 0 γράφεται και σαν:

$$\{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$ για κάποιο διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$]

$$\lambda \vec{v} + \nu \vec{v} = (\lambda + \nu)\vec{v} \in L$$

$$\kappa(\lambda \vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{v} \in L$$

(3) Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$



Τέτοια επίπεδα γράφονται και σαν:

$$\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

για κάποια διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$(\lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v}) + (\lambda_2\vec{u} + \mu_2\vec{v}) = (\lambda_1+\lambda_2)\vec{u} + (\mu_1+\mu_2$$

$$k(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = (k\lambda)\vec{u} + (k\mu)\vec{v}$$

(4) Αν $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τότε το $\mathrm{Span}\{v_1 \dots v_m\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Θα το αποδείξουμε με θεώρημα

Εάν $u, w \in \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$

$\Rightarrow$ Άρα $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$

$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m \quad (k_i \in \mathbb{R})$

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) + (k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m)$$
$$= (\lambda_1 + k_1)v_1 + (\lambda_2 + k_2)v_2 + \dots (\lambda_m + k_m)v_m$$

$\in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

Έστω $u \in \text{Span}\{v_1, \dots v_m\}$

Άρα $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$
$(\lambda_i \in \mathbb{R})$

$$
\begin{aligned}
ku &= k(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) \\
&= k(\lambda_1 v_1) + k(\lambda_2 v_2) + \dots + k(\lambda_m v_m) \\
&= (k\lambda_1) v_1 + (k\lambda_2) v_2 + \dots + (k\lambda_m) v_m
\end{aligned}
$$

$\in \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$

(5) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το $\text{Col}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$

(λόγω του (4) διότι $\text{Col}(A) = \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\}$)

$\downarrow$

στήλες του A

(6) ~~Αν~~ Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $AX = 0$ (το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω X_1, X_2 λύσεις της $AX = 0$

δηλ. $AX_1 = 0$ και $AX_2 = 0$

$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$

Άρα $\Rightarrow$ $X_1 + X_2$ λύση της $Ax = 0$

Αν $\lambda \in \mathbb{R}$

$A(\lambda X_1) = \lambda(AX_1) = \lambda 0 = 0$

Άρα λX_1 λύση της $AX = 0$

Ορισμός: Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των λύσεων της $Ax = 0$

(δηλ. σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα A) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται μηδενικός χώρος ή μηδενοχώρος ή πυρήνας του A και συμβολίζεται με $Nul(A)$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Col(A) & & Nul(A)
\end{tikzcd}$$

Ορισμός: Έστω $S = \{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το S λέγεται βάση του $\mathbb{R}^n$ αν:

① $Span\{v_1, v_2 \ldots v_m\} = \mathbb{R}^n$

② S γραμμικά ανεξάρτητο

✲ Παραδείγματα

(1) Έστω $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε δει ότι $\text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$
και είναι γραμμικά ανεξάρτητα
(γιατί;)

Άρα το $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$
και λέγεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

(2) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Θα δείξουμε ότι $\{V_1, V_2, V_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει ηγετικά στοιχεία σε κάθε γραμμή
Άρα $\text{Span}\{V_1, V_2, V_3\} = \mathbb{R}^3$
($Ax = b \Rightarrow$ έχει λύση για κάθε b)
Επίσης δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές
(κάθε στήλη έχει ηγετικό 1)
Άρα γραμμ. ανεξάρτητα
($AX = 0$ δίνει μοναδ. λύση την τετριμ.)
Άρα είναι βάση