16/10/20 **Υπόχωροι του R^n**

Υπενθύμιση:

- V λέγεται διανυσματικός χώρος με πράξεις: πρόσθεση, βαθμωτό πολ/σμο, αν υπάρχει $0 \in V$ και ισχύουν κάποια αξιώματα για τις πράξεις.

- **Ορισμός:** Έστω V διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ λέγεται υπόχωρος του V αν το 0 του V ανήκει στο W και οι πράξεις (πρόσθεση, βαθμωτός πολ/σμός) του V κάνουν το W διανυσματικό χώρο.

- Αντί να ελέγξουμε όλα τα αξιώματα των διαν. χώρων χρησιμοποιούμε το παρακάτω:

Θεώρημα: Έστω V διαν. χώρος και $W \subseteq V$. Το W είναι υπόχωρος του V αν ισχύουν: 1) αν $u, v \in W$ τότε $u + v \in W$
2) αν $u \in W$ και $\lambda \in R$ τότε $\lambda u \in R$.

Παραδείγματα:

1) Έστω $V = R^n$, το υποσύνολο $W = \{0\}$ είναι υπόχωρος του R^n.
Το υποσύνολο R^n είναι υπόχωρος του R^n.
Τα $\{0\}$ και R^n λέγονται τετριμμένοι υπόχωροι του R^n.

2) Στον R^3 κάθε ευθεία L αντιστοιχεί σε ένα σύνολο του R^3.
Αν η ευθεία L περιέχει το 0 είναι υπόχωρος του R^3. Διαφορετικά δεν είναι υπόχωρος του R^3.

[κάθε ευθεία στον R^3 που διέρχεται από το 0 γράφεται σαν $\{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in R\}$ για κάποιο διάνυσμα $\vec{v} \in R^3$]

- $\lambda\vec{v} + \mu\vec{v} = (\lambda+\mu)\vec{v} \in L$
- $\kappa(\lambda\vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{v} \in L$

3) Στον R^3 κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωρος του R^3

Τέτοια επίπεδα γράφονται και σαν $\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid \lambda, \mu \in R\}$ για κάποια διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in R^3$.

$$(\lambda_1\vec{u} + \mu_1\vec{v}) + (\lambda_2\vec{u} + \mu_2\vec{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{v}$$

$$\kappa(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{u} + (\kappa\mu)\vec{v}$$

4) Αν $v_1, \dots, v_m \in R^n$ τότε το $Span\{v_1, \dots, v_m\}$ είναι υπόχωρος του R^n

$$Span\{v_1, \dots, v_m\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in R\}$$

*Θα το αποδείξουμε με θεώρημα

• Έστω $u, w \in Span\{v_1, \dots, v_m\}$

- Άρα:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \quad (c_i \in R)$$
$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m \quad (k_i \in R)$$
$$u + w = (c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) + (k_1 v_1 + \dots + k_m v_m)$$
$$= (c_1 + k_1) v_1 + (c_2 + k_2) v_2 + \dots + (c_m + k_m) v_m$$
$$\in Span\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

• Άρα: $u = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m \quad (c_i \in R)$

• $$ku = k(c_1 v_1 + \dots + c_m v_m) = k(c_1 v_1) + k(c_2 v_2) + \dots + k(c_m v_m)$$
$$= (kc_1) v_1 + (kc_2) v_2 + \dots + (kc_m) v_m$$
$$\in Span\{v_1, \dots, v_m\}$$

5) Ειδική περίπτωση: Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο του $Col(A)$ είναι υπόχωρος του R^m (λόγω του (4)) διότι $Col(A) = Span(c_1, \dots, c_n)$
← στήλες A

6) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των $x \in R^n$ ώστε $Ax = 0$ (το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος) είναι υπόχωρος του R^n

- Έστω x_1, x_2 λύσεις της $Ax = 0$ δηλαδή $Ax_1 = 0$ και $Ax_2 = 0$

$\rightarrow A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ Άρα $x_1 + x_2$ λύση της $Ax = 0$

• Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda 0 = 0$

• Άρα: λx λύση της $Ax = 0$

• Ορισμός: Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε ο υπόχωρος των λύσεων της $Ax = 0$ (δηλ. σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα A) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται **μηδενικός χώρος** ή **μηδενόχωρος** ή **πυρήνας** του A και συμβολίζεται με **$Nul(A)$**

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Col(A) & & Nul(A) \end{tikzcd}$$

• Ορισμός: Έστω $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το β λέγεται βάση του $\mathbb{R}^n$ αν:

1) $span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathbb{R}^n$
2) β γραμμικά ανεξάρτητο

• Παραδείγματα:

1) Έστω $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• Έχουμε δει ότι $span(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n$ και είναι γραμμ. ανεξάρτητα (γιατί;)
Άρα το $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ και λέγεται **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$.

Π.χ. • στον R^2 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = i$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = j$

• στον R^3 $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = i$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = j$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = k$

2) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$

Θα δείξουμε ότι v_1, v_2, v_3 βάση του R^3

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 9 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

• Έχει ηγετικά στοιχεία σε κάθε γραμμή άρα
$Span\{v_1, v_2, v_3\} = R^3$
($Ax = b$ => έχει λύση για κάθε b)

• Επίσης δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.
(κάθε στήλη έχει ηγετικό 1) άρα γραμ. ανεξ.

($Ax = 0$ έχει μοναδική λύση την τετριμμένη)
Άρα είναι βάση.