16.10.2020

Παράδειγμα:

$v_1, v_2, \dots v_m \in \mathbb{R}^n$
$v_1, v_2 \dots, v_m$ γραμμ. ανεξάρτητα
$\iff x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση

$\iff [v_1 \ \ v_2 \ \dots \ v_m \mid 0]$ έχει μόνο τετρ. λύση

μοναδική λύση → γραμμ. ανεξάρτητα.

$\text{Span}\{v_1, v_2 \dots v_m\}$
$= \{x_1 v_1 + \dots + x_m v_m \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$b \in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots v_m\}$
$\iff x_1 v_1 + \dots + x_m v_m = b$ έχει λύση
$\iff [v_1 \ \ v_2 \dots \ v_m \mid b]$ είναι συμβιβαστό.

Υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$

Υπενθύμιση.
V λέγεται διαν. χώρος με πράξεις πρόσθεση, βαθμωτός πολ/σμός αν υπάρχει $0 \in V$ και ισχύουν κάποια αξιώματα για τις πράξεις

Ορισμός: Έστω V διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ λέγεται υπόχωρος του V αν το 0 του V ανήκει στο W και οι πράξεις (πρόσθεση, βαθμωτοί πολ/σμοί) του V κάνουν το W διανυσματικό χώρο

Αντί να ελέγξουμε όλα τα αξιώματα των διαν. χώρων χρησιμοποιούμε τα παρακάτω.

Θεώρημα: Έστω V διαν. χώρος και $W \subseteq V$. Το W είναι υπόχωρος του V αν ισχύουν:

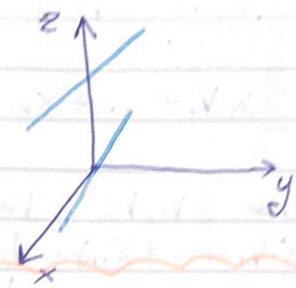
- αν $u, v \in W$ τότε $u+v \in W$
- αν $u \in W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda u \in W$

$\boxed{X \subseteq X}$

Παραδείγματα:

① Έστω $V = \mathbb{R}^n$. ⓐ Το υποσύνολο $W = \{0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. ⓑ Το υποσύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
Τα $\{0\}$ και $\mathbb{R}^n$ λέγονται τετριμμένοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$

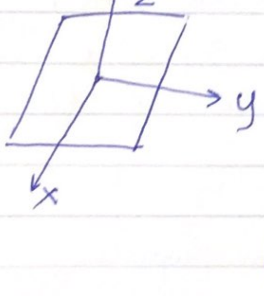
② Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε ευθεία l αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Αν η ευθεία l περιέχει το 0 είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Διαφορετικά δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$



κάθε ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το O γράφεται και σαν $\{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ για κάποιο διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda \vec{v} + \mu \vec{v} = (\lambda + \mu)\vec{v} \in l$$
$$k(\lambda \vec{v}) = (k\lambda)\vec{v} \in l$$

③ Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.



Τέτοια επίπεδα γράφονται και σαν $\{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ για κάποια διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

$$(\lambda_1 \vec{u} + \mu_1 \vec{v}) + (\lambda_2 \vec{u} + \mu_2 \vec{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{v}$$

$$k(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = (k\lambda)\vec{u} + (k\mu)\vec{v}$$

(4) Αν $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τότε το $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

$$\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Θα το αποδείξουμε με το θεώρημα:

Έστω $u, w \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\}$

Άρα $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$

$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots + k_m v_m \quad (k_i \in \mathbb{R})$

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m) + (k_1 v_1 + \ldots + k_m v_m)$$
$$= (\lambda_1 + k_1) v_1 + (\lambda_2 + k_2) v_2 + \ldots + (\lambda_m + k_m) v_m$$
$$\in \operatorname{Span}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

Έστω $u \in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\}$

Άρα το $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$

$$ku = k(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m)$$
$$= k(\lambda_1 v_1) + k(\lambda_2 v_2) + \ldots + k(\lambda_m v_m)$$
$$= (k\lambda_1) v_1 + (k\lambda_2) v_2 + \ldots + (k\lambda_m) v_m$$
$$\in \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\}$$

(5) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το $\operatorname{col}(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ (λόγω του (4) διότι $\operatorname{col}(A) = \operatorname{Span}\{c_1, \ldots, c_n\}$)

στήλες του A

(6) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $Ax = 0$ (το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

- Έστω x_1, x_2 λύσεις της $Ax = 0$ δηλ. $Ax_1 = 0$ και $Ax_2 = 0$

$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$

Άρα $x_1 + x_2$ λύση της $Ax = 0$

• Αν $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A(\lambda x_1) = \lambda (A x_1) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Άρα λx_1 λύση της $Ax = 0$

Ορισμός: Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των λύσεων της $Ax = 0$ (δηλ. σύνολο λύσεων για ομογενούς συστήματος με πίνακα A) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται μηδενικός χώρος ή μηδενοχώροι ή πυρήνας του A και συμβολίζεται με $Nul(A)$.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \swarrow & & \searrow \\ col(A) & & Nul(A) \end{array}$$

Ορισμός: Έστω $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το S λέγεται βάση του $\mathbb{R}^n$ αν

(1) $Span\{v_1, v_2, \dots v_n\} = \mathbb{R}^n$

(2) S γραμμικά ανεξάρτητο

Παραδείγματα:

① Έστω $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε δει ότι $Span\{e_1, e_2 .. e_n\} = \mathbb{R}^n$ και είναι γραμμ. ανεξάρτητα (γιατί;). Άρα το $\{e_1, e_2 .. e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ και λέγεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

Π.Χ στον $\mathbb{R}^2$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = j$

στον $\mathbb{R}^3$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k$

② Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Θα δείξουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή άρα Span$\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$
($Ax = b \Rightarrow$ έχει λύση για κάθε b)

Επίσης δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές (κάθε στήλη έχει ηγετικό 1) άρα γραμ. ανεξ.
($Ax = 0$ δίνει μον. λύση την τετριμμένη)
Άρα είναι βάση.