16/10

Υποχώροι του $\mathbb{R}^n$:

Υπενθύμιση:

V λέγεται διανυσματικός χώρος με πράξεις:

(α) πρόσθεση

(β) βαθμωτό πολ/σμό.

αν υπάρχει $0 \in V$ και ισχύουν κάποια αξιώματα για τις πράξεις.

Ορισμός:

Έστω V διανυσματικός χώρος. Ένα υποσύνολο $W \subseteq V$ λέγεται υποχώρος του V αν το 0 του V ανήκει στο W και οι πράξεις (πρόσθεση, βαθμωτό πολ/σμο) του V κάνουν το W διανυσματικό χώρο.

Αντί να ελέγξουμε όλα τα αξιώματα των διανυσματικών χώρων χρησιμοποιούμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα:

Έστω V διανυσματικός χώρος και $W \subseteq V$. Το W είναι υπόχωροι του V αν ισχύουν:

αν $u, v \in W$ τότε το $u+v \in W$

αν $u \in W$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda \cdot u \in$ ~~W~~ $\mathbb{R}$.

Παραδείγματα:

1) Έστω $V = \mathbb{R}^n$.

Το υποσύνολο $W = \{0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

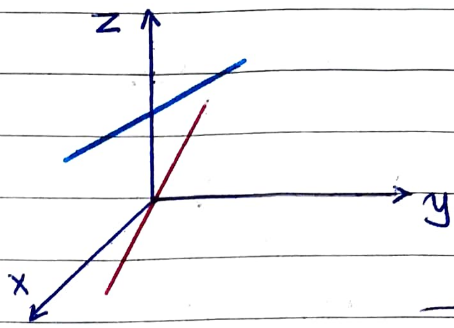
Το υποσύνολο $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ $(X \subseteq X)$

Τα $\{0\}$ και $\mathbb{R}^n$ λέγονται τετριμμένοι υποχώροι του $\mathbb{R}^n$.

2) Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε ευθεία αντιστοιχεί και σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Αν η ευθεία L περιέχει το O είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Διαφορετικά δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.



$\boxed{\text{Κάθε ευθεία στον } \mathbb{R}^3 \text{ που διέρχεται από το } O \text{ γράφεται σαν } \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ για κάποιο διάνυσμα } \vec{v} \in \mathbb{R}^3}$

$$\lambda \vec{v} + \mu \vec{v} = (\lambda + \mu)\vec{v} \quad \in L$$
$$\kappa(\lambda \vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{v} \quad \in L$$

3) Στον $\mathbb{R}^3$ κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι υπόχωρος στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια επίπεδα γράφονται και σαν $\{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, για κάποια διανύσματα $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

$$(\lambda_1 \vec{u} + \mu_1 \vec{v}) + (\lambda_2 \vec{u} + \mu_2 \vec{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{u} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{v}$$
$$\kappa(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{u} + (\kappa\mu)\vec{v}$$

4) Αν $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τότε το $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

Θα το αποδείξουμε με θεώρημα.

Έστω $\vec{u}, \vec{w} \in \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$

Άρα: $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$

$w = \kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \dots + \kappa_m v_m \quad (\kappa_i \in \mathbb{R})$

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) + (\kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_m v_m)$$
$$= (\lambda_1 + \kappa_1)v_1 + (\lambda_2 + \kappa_2)v_2 + \dots + (\lambda_m + \kappa_m)v_m$$

$\in \mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

Έστω $u \in Span\{v_1, \dots, v_m\}$

Άρα το $u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$ $(a_i \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} k.u &= k(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) \\ &= k(a_1 v_1) + k(a_2 v_2) + \dots + k(a_m v_m) \\ &= (k a_1) v_1 + (k a_2) v_2 + \dots + (k a_m) v_m \\ &\in Span\{v_1, \dots, v_m\} \end{aligned}$$

5) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το $Col(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

(λόγω του (4) διότι $Col(A) = Span\{C_1, \dots, C_n\}$ στήλες A

6) Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $A.x = 0$ (το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Έστω x_1, x_2 λύσεις της $A.x = 0$, δηλ $Ax_1 = 0$ και $Ax_2 = 0$.

$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$

Άρα το $x_1 + x_2$ λύση της $Ax = 0$

Αν $a \in \mathbb{R}$,

$$A(ax_1) = a(Ax_1) = a.0 = 0$$

Άρα ax_1, λύση της $Ax = 0$.

Ορισμός:

Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας τότε το σύνολο των λύσεων της $AX = 0$ (δηλ σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος με πίνακα A) είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και αναφέρεται μηδενικός χώρος ή μηδενόχωροι ή πυρήνας του A και συμβολίζεται με $Nul(A)$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Col(A) & & Nul(A) \end{tikzcd}$$

Ορισμός:
Έστω $S = \{ V_1, V_2, \dots, V_m \}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το S λέγεται βάση του $\mathbb{R}^n$ αν:
(1) $Span\{V_1, V_2, \dots, V_m\} = \mathbb{R}^n$
(2) S γραμμικά ανεξάρτητο.

Παραδείγματα:

1) Έστω $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Έχουμε δει ότι $Span\{ e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα (γιατί;)
Άρα το $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ και λέγεται κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

π.χ: στον $\mathbb{R}^2$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i$, $e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = j$
Στον $\mathbb{R}^3$:
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = i$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = k$.

(2) Έστω $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Θα δείξουμε ότι $\{V_1, V_2, V_3\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή άρα $Span\{V_1, V_2, V_3\} = \mathbb{R}^3$
($AX = b \Rightarrow$ έχει λύση $\forall b$)

Επίσης δεν έχουμε ελεύθερες μεταβλητές. (κάθε στήλη έχει ηγετικό 1) άρα γραμμικά ανεξάρτητα.
($AX = 0$ δίνει μοναδική λύση την τετριμμένη).
Άρα είναι βάση.