20/10

Υπενθύμιση:

Υποχωροι διανυσματικοί χώροι:

$$A$$

$col(A) = Span\{$στήλες

$Nul(A) =$ σύνολο λύσεων της ομογενούς $AX=0$.

Βάση:

σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγει τον χώρο.

π.χ.: $\mathbb{R}^3$ 2 βάσεις. $\{e_1, e_2, e_3\}$ κανονική βάση

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$$ βάση.

Εφόσον μια βάση παράγει τον διανυσματικό χώρο, κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται σαν γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης.

Θεώρημα:
Αν $S=\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε κάθε διάνυσμα των $\mathbb{R}^n$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδιασμός των $V_1, V_2, \ldots, V_n$.

Απόδειξη:
Έστω $b \in \mathbb{R}^n$ και ας υποθέσουμε ότι:

$$b = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_n V_n \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

και $b = k_1 V_1 + k_2 V_2 + \ldots + k_n V_n \quad (k_i \in \mathbb{R})$

Τότε:

$$b - b = (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots + \lambda_n V_n) - (k_1 V_1 + k_2 V_2 + \ldots + k_n V_n)$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 V_1 - k_1 V_1) + (\lambda_2 V_2 - k_2 V_2) + \ldots + (\lambda_n V_n - k_n V_n)$$

$$\Rightarrow 0 = (\lambda_1 - k_1) V_1 + (\lambda_2 - k_2) V_2 + \ldots + (\lambda_n - k_n) V_n$$

Εφόσον τα V_1, V_2, V_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$\Rightarrow \lambda_1 - k_1 = 0, \lambda_2 - k_2 = 0, \ldots, \lambda_n - k_n = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2, \ldots, \lambda_n = k_n$$

Τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ λέγονται συντεταγμένες του b ως προς τη βάση $\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$.

Π.Χ:

Δείξαμε ότι τα $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ως προς αυτή την βάση.

* Ψάχνουμε x_1, x_2, x_3 ώστε $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 9 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\boxed{x_3 = 2}$

$x_2 - x_3 = -3 \Rightarrow \boxed{x_2 = -1}$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

Άρα $v = 1v_1 - 1v_2 + 2v_3$

Θεώρημα:
Έστω $S = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ μιά βάση διανυσματικού χώρου V.

- Κάθε υποσύνολο του V με περισσότερα από n διανύσματα είναι γραμ. εξαρτημένα.
- Κάθε υποσύνολο του V με λιγότερα από n διανύσματα δεν παράγει το V.

Άρα κάθε βάση περιέχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ορισμός:
Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V, συμβολίζεται με $\dim(V)$, είναι το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του χώρου.

Π.Χ:
$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$
[έχει βάση τα $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.]

Π.Χ:
Αν τα $V_1, V_2, \dots, V_n$ είναι γραμ. ανεξάρτητα.
$\dim(\mathrm{Span}\{V_1, V_2, \dots, V_n\}) = n$

Π.Χ:
Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Το σύνολο λύσεων του ομογενούς $AX = 0$ είναι το
$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (γιατί;)
$\| $
$\mathrm{Nul}(A)$
$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 1$

Θεώρημα:

Έστω V διανυσματικός χώρος με $\dim(V)=n$ και $S \subseteq N$ με n στοιχεία. Αν το S είναι ανεξάρτητο ή παράγει τον V τότε το S είναι βάση του V.

Π.Χ.:

$$v_1=\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}, \quad v_2=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

Τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου) και γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathbb{R}^2)=2$.
Άρα τα v_1, v_2 αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^2$.