20/10/20

Εφόσον μια βάση παράγει τον διανυσματικό χώρο κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης.

Θεώρημα: Αν $S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ βάση του R^n τότε κάθε διάνυσμα του R^n γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικό συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots v_n$

Απόδειξη: Έστω $b \in R^n$ και ας υποθέσουμε ότι
$b = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n$ ($\gamma \in R$)
και $b = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$ ($k \in R$)

Τότε: $b - b = (\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_n v_n) - (k_1 v_1 + k_2 v_2 \dots + k_n v_n)$

$\Rightarrow 0 = (\gamma_1 v_1 - k_1 v_1) + (\gamma_2 v_2 - k_2 v_2) + \dots + (\gamma_n v_n - k_n v_n)$

$\Rightarrow 0 = (\gamma_1 - k_1) v_1 + (\gamma_2 - k_2) v_2 + (\gamma_n - k_n) v_n$

Εφόσον τα v_1, v_2, v_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

$\gamma_1 - k_1 = 0, \gamma_2 - k_2 = 0, \dots, \gamma_n - k_n = 0$
$\Rightarrow \gamma_1 = k_1, \gamma_2 = k_2, \dots, \gamma_n = k_n$

Τα $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ λέγονται συντεταγμένες του b ως προς την βάση $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$

Παράδειγμα: Δείξατε ότι $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}2\\9\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$

αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$. Να βρεθούν συντεταγμένες του $v = \begin{pmatrix}5\\-1\\9\end{pmatrix}$ ως προς αυτή την βάση

Ψάχνουμε: x_1, x_2, x_3 ώστε $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = v$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 9 & 3\\1 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\9\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\2 & 9 & 3 & -1\\1 & 0 & 4 & 9\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\0 & 5 & -3 & -11\\0 & -2 & 1 & 4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & -2 & 1 & 4\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & -1 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & -1 & -2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 5\\0 & 1 & -1 & -3\\0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$x_3 = 2$

$x_2 - x_3 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 5 + 2 - 6 = 1$

Άρα $v = 1v_1 - 1v_2 + 2v_3$

Θεώρημα: Έστω S μια βάση διανυσματικού χώρου V.

$\hookrightarrow S = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$

- Κάθε υποσύνολο του V με περισσότερα από n διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένο.

- Κάθε υποσύνολο του V με λιγότερο από n διανύσματα δεν παράγει το V.

Άρα κάθε βάση περιέχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ορισμός: Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V, συμβολίζεται με $\dim(V)$, είναι το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του χώρου.

π.χ. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, [έχει βάση τα $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$]

π.χ. Αν τα $v_1, v_2, \dots v_n$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα
$\dim(\mathrm{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) = n$.

π.χ. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Το σύνολο λύσεων του ομογενούς $Ax = 0$ είναι το $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Nul}(A)$

$\dim(\mathrm{Nul}(A)) = 1$

Θεώρημα: Έστω V διαν. χώρος με $\dim(V) = n$ και $S \subseteq V$ με n στοιχεία.

Αν το S είναι γραμ. ανεξάρτητο ή παράγει το V τότε το S είναι βάση του V.

π.χ. $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν είναι το ένα πολ/σιο του άλλου) και γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Άρα τα v_1, v_2 αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^2$