V διαν. χωρος

Καθε βαση εχει το ιδιο πληθος στοιχειων

Βαση = γραμμικα ανεξαρτ. διανυσματα που παραγουν τον χωρο

Ορισμός: Έστω A ένας m×n πίνακας. Η τάξη ή βαθμός του A είναι η διάσταση του Col(A)

Συμβολίζεται με rank(A)

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A))$$

Η μηδενικότητα του A είναι η διάσταση του μηδενοχώρου Nul(A). Συμβολίζεται με:

$$\text{nullity}(A) = \dim(\text{Nul}(A))$$

Θεώρημα:

Αν ο A είναι κλιμακωτός πίνακας τότε οι στήλες που περιέχουν ηγετικό στοιχείο αποτελούν βαση για το Col(A)

π.χ. $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

στηλες που περιεχουν ηγετικό 1

$$\text{Col}(A) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\text{Col}(A)) = 3$$

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{Col}(A)) = 3$$ Άρα

* Υπενθύμιση

$A \sim B \not\Rightarrow Col(A) = Col(B)$

Θεώρημα:
Αν $A \sim B$ και ορισμένες στήλες του B αποτελούν βάση για το $Col(B)$ τότε, οι αντίστοιχες στήλες του A αποτελούν βάση για το $Col(A)$.

π.χ.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{rank(B) = ?}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Στον τελευταίο πίνακα οι $1^η$, $3^η$ και $5^η$ στήλες αποτελούν βάση για τον χώρο στηλών.

$$Col(B) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

$dim(Col(B)) = 3 \Rightarrow rank(B) = 3$

Οπότε αν $A \sim B$ τότε $rank(A) = rank(B)$

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

(α) Να βρεθεί βάση του $Null(A)$ και διάσταση του. $(rank(A))$

(β) >> >> >> >> $Col(A)$ >> >>

⊛ ⇒ Πρέπει να κάνουμε τον A κλιμακωτό και για (α)(β) ~~και για τα δύο~~

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ελεύθερες μεταβλητές: x_2, x_4, x_5

$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$

$x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Άρα $\dim(\text{Nul}(A)) = 3$

δηλ. $\text{nullity}(A) = 3$

(ν) Εφόσον στον κλιμακωτό η 1^{η} και η 3^{η} στήλη περιέχουν ηγετικό στοιχείο

το $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ είναι βάση για το $\text{Col}(A)$

Άρα $\dim(\text{Col}(A)) = 2$

δηλ $\text{rank}(A) = 2$

Θεώρημα Τάξης πίνακα

Για κάθε $m \times n$ πίνακα A

$rank(A) + nullity(A) = n$

Απόδειξη: Αν κάνουμε τον A κλιμακωτό

κυρίων μηαβλ. + # ελεύθερων μετ. = # στηλών

$\dim(Col(A))$ + nullity = n

$\dim(Nul(A))$

#: πλήθος

Στο προηγούμενο παράδειγμα

$rank(A) = 2$

$nullity(A) = 3$

$2 + 3 = 5$ = αριθμός στηλών του A

π.χ. A 5×7 πίνακας

Πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχει το ομογενές $AX = 0$ αν γνωρίζουμε ότι η $rank(A) = 3$

$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 7$

$\Rightarrow \text{nullity}(A) = 4$

άρα 4 ελεύθερες μεταβλητές

<u>Θεώρημα:</u>

→ Αν το $AX = b$ είναι συμβιβαστό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους και A έχει τάξη r τότε η γενική λύση του συστήματος έχει $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές

Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για n x n πίνακα A.

I A αντιστρέψιμος

II Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι I_n

IV $AX=0$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη)

V $AX=b$ έχει » » » $\forall b \in \mathbb{R}^n$

VI Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες

VII Οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^n$ δηλ. $Col(A)=\mathbb{R}^n$

VIII $rank(A)=n$

IX $nullity(A)=0$

X Οι στήλες του A αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^n$

XI Υπάρχει πίνακας B ώστε $BA=I_n$

XII Υπάρχει πίνακας B ώστε $AB=I_n$

[Αν οι στήλες 7×7 πίνακα D είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τι μπορείτε να πείτε για τις λύσεις του $DX=b$.]

Λόγω του θεωρήματος αντιστρόφου πίνακα το $DX=b$

$\Rightarrow$ είναι συμβιβαστό

$\Rightarrow$ έχει μοναδική λύση

για κάθε b.