23/10

Υπενθ:

V διανυσματικός χώρος:
Κάθε βάση έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων = διάσταση dim(V)

Βάση: γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν το χώρο.

A

Col(A) = Span (στηλών)

Nul(A) = χώρος λύσεων ομογενούς $AX=0$

Ορισμός:

Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας:
Η τάξη ή βαθμός του A είναι η διάσταση του $col(A)$
Συμβολίζεται με $rank(A)$

$$\boxed{rank(A) = dim(col(A))}$$

Η μηδενικότητα του A είναι η διάσταση του μηδενοχώρου $Nul(A)$. Συμβολίζεται:

$$\boxed{nullity(A) = dim(Nul(A))}$$

Θεώρημα:

Αν ο A είναι κλιμακωτός πίνακας τότε η στήλες που περιέχουν ηγετικό στοιχείο αποτελούν βάση για το $col(A)$

Π.Χ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$col(A) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Άρα $dim(col(A)) = 3$

Υπενθύμιση: $A \sim B \not\Rightarrow col(A) = col(B)$

Θεώρημα:

Αν $A \sim B$ και ορισμένες στήλες του B αποτελούν βάση για το col(B) τότε οι αντίστοιχες στήλες του A αποτελούν βάση για το col(A).

Π.χ:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

τον κάνουμε κλιμακωτό

rank(B) = ?

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Παίρνουμε τις στήλες με τα ηγετικά στοιχεία

Στον τελευταίο πίνακα οι $1^η$, $3^η$, $5^η$ στήλη αποτελούν βάση.

$$col(B) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

dim (col(B)) = 3

rank(B) = 3

Οπότε αν $A \sim B$ τότε $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$

π.χ.:

Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

(α) Να βρεθεί βάση του $Nul(A)$ και διάσταση.
(β) Να βρεθεί βάση του $Col(A)$ και διάσταση.

Και για τα 2 ερωτήματα πρέπει να κάνουμε τον A κλιμακωτό.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ελεύθερες μεταβλητές: x_2, x_4, x_5

$$x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$$
$$x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{Nul}(A)$$

γραμμικά ανεξάρτητα.

Άρα $\dim(\text{Nul}(A))=3$, δηλ. $\text{nullity}(A)=3$

ii) Εφόσον στον κλιμακωτό οι $1^η$ και $3^η$ στήλη περιέχουν ηγετικό στοιχείο, το $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$ είναι βάση για το $\text{col}(A)$

Άρα $\dim(\text{col}(A))=2$, δηλ. $\text{rank}(A)=2$.

Θεώρημα τάξη πίνακα:

Για κάθε $m\times n$ πίνακα A

$$\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=n$$

Απόδειξη:

Αν κάνουμε τον A κλιμακωτό

πλήθος

$$\underbrace{\#\text{κύριων μεταβλητών}}_{\dim(\text{col}(A))} + \underbrace{\#\text{ελεύθερων μεταβλητών}}_{\dim(\text{Nul}(A))} = \underbrace{\#\text{στηλών}}_{n}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\text{rank}(A) = 2, \ \text{nullity}(A) = 3$$

$2+3 = 5 =$ αριθμός στηλών του A.

Π.χ.:

A 5x2 πίνακας

Πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχει το ομογενές $AX = 0$ αν γνωρίζουμε ότι $\text{rank}(A) = 3$

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 7$$

$\Rightarrow \text{nullity}(A) = 4$, άρα 4 ελεύθερες μεταβλητές.

Θεώρημα:

Αν το $AX = b$ είναι συμβιβαστό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους και ο A έχει τάξη r τότε η γενική λύση του συστήματος έχει $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές.

Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα:

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για $n \times n$ πίνακα A:

I) A αντιστρέψιμος.

II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n.

IV) $AX = 0$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη)

V) $AX = b$ έχει μοναδική λύση $\forall b \in \mathbb{R}^n$

VI) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

VII) Οι στήλες του A παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, δηλ δηλ $\text{col}(A) = \mathbb{R}^n$.

VIII) $\text{rank}(A) = n$

IX) $\text{nullity}(A) = 0$

X) Οι στήλες του A αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^n$

XI) Υπάρχει πίνακας B ώστε $BA = I$

XII) Υπάρχει πίνακας B ώστε $AB = I_n$

Άσκηση:

Αν οι στήλες ενός 7×7 πίνακας D είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τι μπορείτε να πείτε για τις λύσεις του $Dx=b$;

Απαν:

Λόγω του Θεωρήματος Αντιστρόφου πίνακα το $Dx=b$

- είναι συμβιβαστό
- έχει μοναδική λύση.

$\forall b$.