23/10/20 Υπενθύμιση:

• V διαν. χώρος

Κάθε βάση έχει ίδιο πλήθος στοιχείων
= διάσταση dim(V)

Βάση = γραμμικά ανεξ. διανύσματα που παράγουν τον χώρο

A → Col(A) = Span στηλών
A → Nul(A) = χώρος λύσεων ομογενούς $Ax=0$

• **Ορισμός:** Έστω A ένας m×n πίνακας. Η τάξη ή βαθμός του A είναι η διάσταση του Col(A).
• Συμβολίζεται με rank(A) = dim(Col(A))

• Η μηδενικότητα του A είναι η διάσταση του μηδενοχώρου Nul(A). Συμβολίζεται:
nullity(A) = dim(Nul(A))

• **Θεώρημα:** Αν ο A είναι κλιμακωτός πίνακας τότε οι στήλες που περιέχουν ηγετικό στοιχείο αποτελούν βάση για το Col(A)

π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Col(A) = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$$

Άρα dim(Col(A)) = 3

Υπενθύμιση: $A \sim B \not\Rightarrow Col(A) = Col(B)$

Θεώρημα: Αν ο $A \sim B$ και οδηγούσες στήλες του B αποτελούν βάση για το $Col(B)$, τότε οι αντίστοιχες στήλες του A αποτελούν βάση για το $Col(A)$.

π.χ. $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$, $rank(B) = ;$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Στον τελευταίο πίνακα η πρώτη, τρίτη και πέμπτη στήλη αποτελούν βάση για τον χώρο στηλών

- $Col(B) = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

- $dim(Col(B)) = 3$
- $rank(B) = 3$

• Οπότε αν $A \sim B$ τότε $rank(A) = rank(B)$

π.χ. Έστω $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

α) Να βρεθεί βάση του $Nul(A)$ και διάσταση

β) Να βρεθεί βάση του $Col(A)$ και διάσταση

• και για τα δύο ερωτήματα πρέπει να κάνουμε τον A κλιμακωτό.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

Ελεύθερες μεταβλητές $= x_2, x_4, x_5$

• $x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = -2x_4 + 2x_5$

• $x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ 0 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_5 \\ 0 \\ 2x_5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= Span \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Βάση } Nul(A)} = Nul(A)$$

- Άρα $\dim(Nul(A)) = 3$
  δηλαδή $nullity(A) = 3$

- Εφόσον στον κλιμακωτό η πρώτη και τρίτη στήλη περιέχουν ηγετικό στοιχείο το

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$ είναι βάση για το $Col(A)$

- Άρα $\dim(Col(A)) = 2$ δηλ. $rank(A) = 2$

Θεώρημα τάξης πίνακα: Για κάθε $m \times n$ πίνακα A

$rank(A) + nullity(A) = n$

Αποδ.: Αν κάνουμε τον A κλιμακωτό τότε

$$\underbrace{(\text{αριθμός κυρίων μετ.})}_{\dim(Col(A))} + \underbrace{(\text{αριθμό ελεύθερων μετ.})}_{\dim(Nul(A))} = \underbrace{(\text{αριθμό στηλών})}_{n}$$

π.χ. $A \rightarrow 5\times 7$ πίνακας, πόσες ελεύθερες μεταβλητές θα έχει το ομογενές σύστημα $Ax=0$ αν γνωρίζουμε ότι η rank(A) = 3

$\text{rank}(A)+\text{nullity}(A)=7 \Rightarrow 3+\text{nullity}(A)=7$
$\Rightarrow \text{nullity}(A)=4$ άρα 4 ελεύθερες μεταβλητές.

Θεώρημα: Αν το $Ax=b$ είναι συμβιβαστό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους και ο A έχει τάξη (r) τότε η γενική λύση του συστήματος έχει $n-r$ ελεύθερες μεταβλητές.

· Θεώρημα αντιστρόφου πίνακα:

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για nxn πίνακα A.

I) A αντιστρέψιμος
II) Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n
IV) $Ax=0$ έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη)
V) $Ax=0$ έχει μοναδική λύση (την τετριμένα)
VI) Οι στήλες του A είναι γραμ. ανεξ.
VII) Οι στήλες του A παράγουν τον R^n δηλ. $\text{Col}(A)=R^n$
VIII) $\text{rank}(A)=n$
IX) $\text{nullity}(A)=0$
X) Οι στήλες του A αποτελούν βάση για τον R^n

Extra $\left\{ \begin{array}{l} \text{XI) Υπάρχει πίνακας B ώστε } BA=I \\ \text{XII) Υπάρχει πίνακας B ώστε } AB=I \end{array} \right.$

π.χ.

- Εαν έχω πίνακα D: 7×7 με στήλες γραμμ. ανεξ. τι συμπεραίνουμε για τις λύσεις του $Dx = b$;

→ Λόγω του Θεωρήματος Αντ. πίνακα το $Dx = b$ είναι συμβιβαστό και έχει μοναδική λύση για κάθε b.