... του θεωρήματος Αντιστρόφου πίνακα το $Bx=b$
- είναι συμβιβαστό
- έχει μοναδική λύση.

$\forall b$.

27/10

<u>Υπενθ:</u>

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ \swarrow & & \searrow \\ col(A) & & Nul(A) \\ \dim(col(A)) & & \dim(Nul(A)) \\ \| & & \| \\ rank(A) & & nullity(A) \end{array}$$

$rank(A) + nullity(A) =$ αριθμό στηλών του A.

<u>Γραμμικές απεικονίσεις:</u>

<u>Ορισμός:</u>
Κάθε συνάρτηση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται <u>απεικόνιση</u> ή <u>μετασχηματισμός</u>. Η απεικόνιση T αντιστοιχεί κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ σε ένα μόνο διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$.

Π.χ:

$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = x$

$T(x) = 2x$

$T(x) = -\frac{1}{2}x$

Π.χ:

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}}$$

Αν θέλουμε να βρούμε $x \in \mathbb{R}^2$ ώστε $T(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ τότε

ψάχνουμε x_1, x_2 ώστε:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_2]{R_1 \to R_1 + 3R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άρα $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{-1}{2}$, δηλαδή

$T\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, άρα το $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in$ στο σύνολο τιμών της T.

Είναι το $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ στο πεδίο τιμών της T;

Για να είναι στο πεδίο τιμών πρέπει το σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$ να είναι συμβιβαστό

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -31 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & -31 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{4}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -31 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{array}\right)$$

Το σύστημα είναι μη συμβιβαστό άρα το $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ δεν ανήκει στο πεδίο τιμών.

Ερώτηση:

Ποιές γραμμικές απεικονίσεις T είναι της μορφής $T(x) = Ax$ για κάποιον πίνακα A;

Ορισμός:

Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση αν $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

① $T(x+y) = T(x) + T(y)$

② $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Ιδιότητες:

① Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y)$

(το ίδιο και για περισσότερα από 2 διανύσματα).

② $T(0) = 0$

διότι $T(0) = T(0x) = 0 \cdot T(x) = 0$

↳ $0 \in \mathbb{R}$

③ $T(x-y) = T(x+(-1)y) = T(x) + T(-1y) = T(x) - T(y)$

$\Rightarrow T(x-y) = T(x) - T(y)$

④ $T(-x) = -T(x)$

διότι $T(-x) = T(-1x) = -1\,T(x) = -T(x)$

Παραδείγματα:

① $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(x) = 0$ είναι γραμμική απεικόνιση.

↳ ισχύει για $T(x) + T(y) = 0 \Rightarrow T(x) = 0, T(y) = 0$

↳ – " – $\lambda T(x) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ή $T(x) = 0$

⇒ πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση.

② $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x$ είναι γραμμική απεικόνιση

διότι $T(x+y) = x + y = T(x) + T(y)$

$T(\lambda x) = \lambda x = \lambda \cdot T(x)$

③ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι γραμμική απεικόνιση, διότι:

$T(x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = T(x) + T(y)$

$T(kx) = \lambda(kx) = (\lambda k)x = k(\lambda x) = k\lambda(x) = kT(x)$

Για $\lambda > 1$, η T λέγεται διαστολή

$\lambda < 1$, η T λέγεται συστολή

④ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x + x_0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq 0$

Δεν είναι γραμμική απεικόνιση

$T(0) = 0 + x_0 = x_0 \neq 0$

Θεώρημα:
Η απεικόνιση T είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $m\times n$ πίνακας A ώστε η $T(x) = AX$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{m\times n}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$n\times 1$ $\quad$ $m\times n$ $\quad$ $n\times 1$

$m\times 1$

Απόδειξη:

($\Leftarrow$) Έστω απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(x) = AX$ όπου A είναι $m\times n$ πίνακας.
Για να δείξουμε ότι T γραμμική ελέγχουμε τον ορισμό.

$$T(x+y) = A(x+y) = AX + Ay = T(x) + T(y)$$

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(AX) = \lambda T(x)$$

Άρα T γραμμική

($\Rightarrow$) Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση.
Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}^n$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) =$$

$$= x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_n \cdot T(e_n)$$

Έστω A ο πίνακας $[T(e_1) \;\; T(e_2) \;\; \dots \;\; T(e_n)]$

Τότε

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [T(e_1) \;\; T(e_2) \dots T(e_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ορισμός:

Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση.

Ο πίνακας $[T(e_1) \;\; T(e_2) \;\; \dots \;\; T(e_n)]$ λέγεται κανονικός πίνακας της απεικόνισης T.

Παραδείγματα:

① $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

(ανάκλαση ως προς άξονα x)

Είναι γραμμική διότι $T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) =$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ -\lambda x_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ -x_2\end{pmatrix} =$$
$$= \lambda \cdot T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τον κανονικό πίνακα υπολογίζουμε

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας της T είναι ο $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

(2)

$$T = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + x_2\\ x_1 - 3x_2\\ -x_1 + x_2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\\ 3\times 2\end{pmatrix}$$

Είναι γραμμική (γιατί;)

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \quad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Άρα ο κανονικός πίνακας της T είναι ο

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$