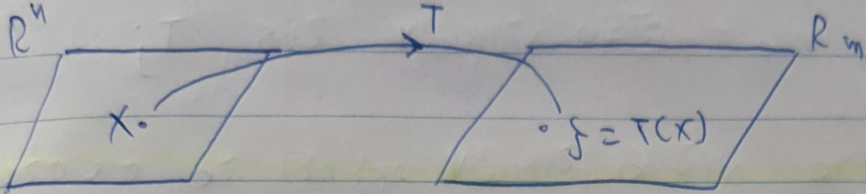
27/10/20 **Γραμμικές απεικονίσεις**

• **Ορισμός:** κάθε συνάρτηση $T: R^n \to R^m$ ονομάζεται **απεικόνιση** ή **μετασχηματισμός**. Η απεικόνιση T αντιστοιχεί κάθε διάνυσμα του R^n σε ένα μόνο διάνυσμα του R^m.



Παράδειγμα: $T: R^3 \to R^3$, $T(x) = x$

$T(x) = 2x$

$T(x) = -\frac{1}{2}x$

Παράδειγμα: $T: R^2 \to R^3$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

• Αν θέλουμε να βρούμε $x \in R^2$ ώστε $T(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Τότε ψάχνουμε x_1, x_2 ώστε: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ +2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$

• Άρα $x_1 = 3/2$ και $x_2 = -1/2$ δηλ. $T\begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

άρα το $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της T.

• Είναι το $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ +5 \end{pmatrix}$ στο πεδίο τιμών της T;

→ Για να είναι στο πεδίο τιμών πρέπει το σύστημα

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ να είναι συμβιβαστό

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{array}\right)$$

• Το σύστημα είναι μη συμβιβαστό άρα το $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ δεν ανήκει στο πεδίο τιμών.

• Ερώτηση: Ποιες γραμμικές απεικονίσεις T είναι της μορφής $T(x) = A \cdot x$ για κάποιον πίνακα A;

• Ορισμός: Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $c \in \mathbb{R}$,

1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$
2) $T(cx) = c\,T(x)$

Ιδιότητες:

1) Αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y)$
(το ίδιο και για περισσότερα από 2 διανύσματα)

2) $T(0) = 0$ διότι $T(0) = T(0x) = 0\,T(x) = 0$

3) $T(x-y) = T(x + (-1)y) = T(x) + T(-1y) = T(x) - T(y)$

$T(x-y) = T(x) - T(y)$

4) $T(-x) = -T(x)$ διότι $T(-x) = T(-1x) = -1\,T(x) = -T(x)$

Παραδείγματα:

1) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(x) = 0$ είναι γραμμική απεικόνιση

2) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x$ είναι γραμμική απεικόνιση
διότι $T(x+y) = x+y = T(x) + T(y)$
$T(\lambda x) = \lambda x = \lambda T(x)$

3) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι γραμμικό διότι: $T(x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = T(x) + T(y)$
$T(\kappa x) = \lambda(\kappa x) = \lambda\kappa(x) = (\kappa\lambda)x = \kappa(\lambda x) = \kappa\, T(x)$

- Για $\lambda > 1$, η T λέγεται διαστολή
όταν $\lambda < 1$ η T λέγεται σύστολή

4) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = x + x_0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Δεν είναι γραμμική διότι:

$$T(0) = 0 + x_0 = x_0 \neq 0$$

Θεώρημα: Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας A ώστε $T(x) = Ax$

$$\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}} \to \underbrace{\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}}_{m\times 1}$$

Απόδειξη: • Έστω απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(x) = A(x)$ όπου A ένας $m \times n$ πίνακας

• Για να δείξουμε ότι T γραμμική ελέγχουμε τον ορισμό

• $T(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)$
$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda T(x)$

• Άρα T γραμμική.

$\Rightarrow$ • Έστω $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση

• Έστω $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$

ό

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n$$

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = T(x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_ne_n)$$

$$= x_1T(e_1)+x_2T(e_2)+\dots+x_nT(e_n)$$

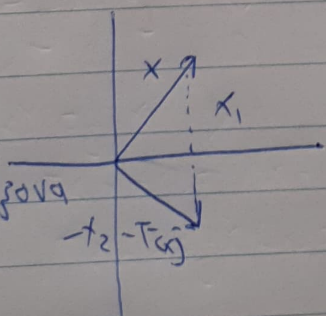
• Έστω A ο πίνακας $[T(e_1)\ \ T(e_2)\ \dots\ T(e_n)]$

Τότε $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = [T(e_1)\ \ T(e_2)\ \dots\ T(e_n)]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

<u>Ορισμός:</u> Έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας $[T(e_1)\ \ T(e_2)\ \dots\ T(e_n)]$ λέγεται <u>κανονικός πίνακας</u> της απεικόνισης T.

<u>Παράδειγμα</u>

1) $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_2\end{pmatrix}$



(ανάκλαση ως προς άξονα x)

Είναι γραμμική διότι: $T\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]=T\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\-x_2-y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\-y_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$T\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ -\lambda x_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}x_1\\ -x_2\end{pmatrix} = \lambda T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

• Για να βρούμε τον κανονικό πίνακα υπολογίζουμε

$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\quad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

Άρα ο πίνακας της T είναι ο $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

2) $T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + x_2\\ x_1 - 3x_2\\ -x_1 + x_2\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\\ 3\times 2\end{pmatrix}$

Είναι γραμμική (γιατί;)

$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$, $T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$

Άρα ο κανονικός πίνακας της T είναι ο

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -3\\-1 & 1\end{pmatrix}$$