30/10

·Υπενθύμιση:

Απεικονίσεις: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Γραμμικές: $T(x+y) = T(x) + T(y)$

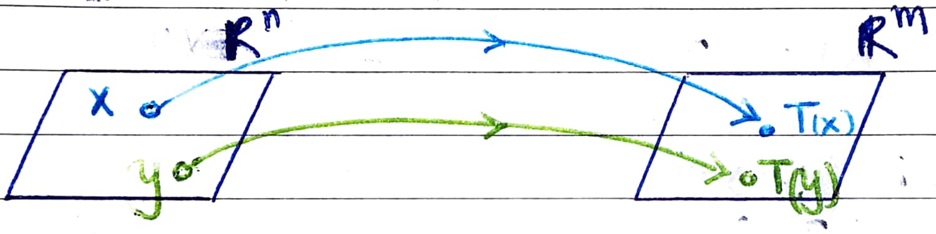
$T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Γραμμικές $\longleftrightarrow$ υπάρχει πίνακας A ώστε $T(x) = A \cdot X$ κανονικός πίνακας $[\, T(e_1) \quad T(e_2) \quad \dots \quad T(e_n) \,]$

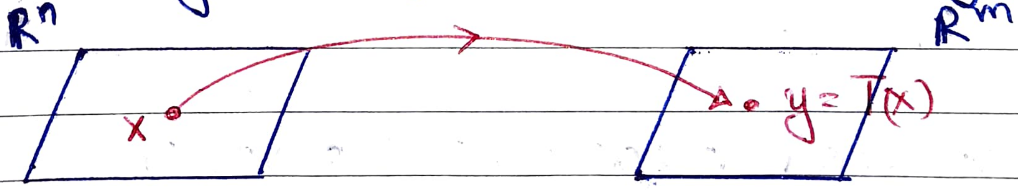
Ορισμός:

Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται "1-1" αν: $\forall$

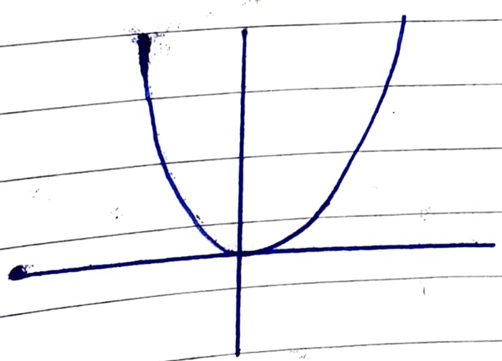
$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$ (ή ισοδύναμα $x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$)



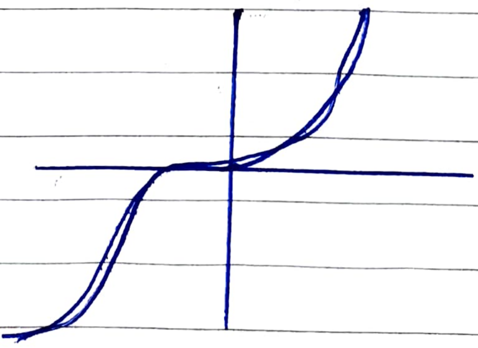
"Επί" αν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = y$



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



(δηλ σύνολο τιμών $= \mathbb{R}^m$)

Θεώρημα:

Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση με $T(x) = AX$ για κάποιον $m \times n$ πίνακα A, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) T 1-1
2) $T(x) = 0 \Rightarrow X = 0$
3) $AX = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση
4) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

σημείωση: $T(x) = 0 \Rightarrow AX = 0$

Θεώρημα:

Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση με $T(x) = A$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) T επί

$m \times n \cdot n \times 1 = m \times 1$

2) $\forall b \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $A \cdot X = b$ είναι συμβιβαστό
3) $Col(A) = \mathbb{R}^m$

π.χ:

$T(x) = X \;,\; X \in \mathbb{R}^n \quad (T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

Προφανώς είναι 1-1 διότι αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $T(x) = T(y)$, τότε $X = T(x) = T(y) = y$

$\Rightarrow X = y$

Επί διότι αν $x \in \mathbb{R}^n$: τότε $T(x) = x$

π.χ:

Για $x \in \mathbb{R}^n$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; έστω $x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$

$T(x) = X^2 \;,\; x \in \mathbb{R}^n \quad (T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

T δεν είναι 1-1:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:

T 1-1 $\iff AX=0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση

$\iff$ η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη (δεν προκύπτουν ελ. μεταβλητές).

T επί $\iff AX=b$ συμβιβαστό για κάθε b.

$\iff$ η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή

Π.Χ:

$$T(X)=AX \quad , \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Είναι η T 1-1 ή επί;

- Υπάρχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή $\Rightarrow$ T είναι επί
- Δεν έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη άρα T δεν είναι 1-1

Π.Χ:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 \\ 5x_1+7x_2 \\ x_1+3x_2 \end{pmatrix}$$

Είναι η T 1-1 ή επί;

T είναι γραμμική: Έστω $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3(x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ 5(x_1+y_1)+7(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)+3(x_2+y_2) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 3x_1+3y_1+x_2+y_2 \\ 5x_1+5y_1+7x_2+7y_2 \\ x_1+y_1+3x_2+3y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 \\ 5x_1+7x_2 \\ x_1+3x_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3y_1+y_2 \\ 5y_1+7y_2 \\ y_1+3y_2 \end{pmatrix}=$$

$$=T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T\left(a\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}ax_1\\ax_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3ax_1+ax_2\\5ax_1+7ax_2\\ax_1+3ax_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(3x_1+x_2)\\a(5x_1+7x_2)\\a(x_1+3x_2)\end{pmatrix}$$

$$=a\begin{pmatrix}3x_1+x_2\\5x_1+7x_2\\x_1+3x_2\end{pmatrix}=a\,T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Άρα δείξαμε ότι η T είναι γραμμική

$$T(e_1)=T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix},\quad T(e_2)=T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}$$

Άρα ο κανονικός πίνακας της T είναι:

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\5&7\\1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3\\0&-8\\0&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη $\Rightarrow T$ 1-1
δεν έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή $\Rightarrow T$ δεν είναι επί

- οι στήλες του A προφανώς γραμμικές ανεξάρτητες $\Rightarrow T$ 1-1
- $(Col(A)) \neq \mathbb{R}^3$ διότι έχει μόνο 2 στήλες

Θεώρημα Αντίστροφου Πίνακα:

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για τετραγωνικό $n\times n$ πίνακα A:

(I) A αντίστροφος.
(XIII) Η απεικόνιση $T(x)=Ax$ είναι 1-1
(XIV) Η απεικόνιση $T(x)=Ax$ είναι επί

Ασκήσεις Κεφαλαίου 3Β

(16) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4)$

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = T(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = T(0,1,1,0)$$

$$T(e_3) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = (0,0,1,1)$$

$$T(e_4) = T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = (0,0,0,1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- Δεν είναι 1-1, δεν έχει ηγετικά στοιχεία σε κάθε στήλη.
- Δεν είναι επί, δεν έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή.

(14) 1. $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$, είναι γραμμική;

1ος τρόπος: $T((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) =$
$= (2(x_1+y_1) - 3(x_2+y_2), x_1+y_1+4, 5(x_2+y_2)) =$
$= (2x_1+2y_1-3x_2-3y_2, x_1+y_1+4, 5x_2+5y_2) =$
$= (2x_1-3x_2, x_1, 5x_2) + (2y_1-3y_2, y_1-4, 5y_2) =$
$= T(x_1,x_2) + (T y_1, y_2)$
$\neq T(x_1,x_2) + T(y_1,y_2)$

2ος τρόπος: $T(0,0) = (0,4,0) \neq (0,0,0)$

Δεν είναι γραμμική διότι θα έπρεπε $T(0,0) = (0,0,0)$