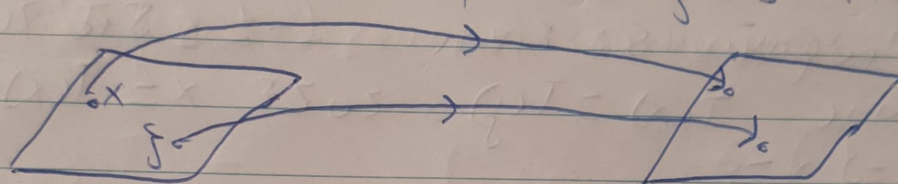
30/10/20 Απεικονίσεις $T: R^n \to R^m$

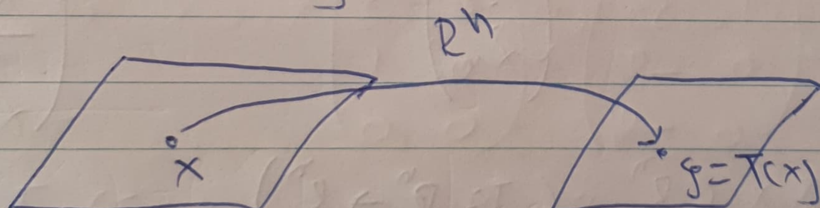
Γραμμικές $T(x+y) = T(x) + T(y)$
$T(cx) = cT(x)$

Γραμμικές $\Leftrightarrow$ υπάρχει πίνακας A ώστε $T(x) = Ax$
κανονικός πίνακας $[T(e_1)\ T(e_2) \dots T(e_n)]$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $T: R^n \to R^m$ λέγεται
→ 1-1 αν $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$
(ή ισοδύναμα $x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$)



→ Επί αν για κάθε $y \in R^m$ υπάρχει $x \in R^n$ ώστε $T(x) = y$



(δηλ. σύνολο τιμών $= R^m$)

Θεώρημα: Αν $T: R^n \to R^m$ γραμμική απεικόνιση με $T(x) = Ax$ για κάποιον $m \times n$ πίνακα A, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1) T 1-1
2) $T(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
3) $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.
4) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Θεώρημα: Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση με $T(x) = Ax$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα,

1) T επί
2) Για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$ το σύστημα $\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b}$ είναι συμβιβαστό
3) $Col(A) = \mathbb{R}^n$

π.χ. $T(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad (T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

Προφανώς είναι 1-1 διότι αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $T(x) = T(y)$ τότε $x = T(x) = T(y) = y$ $\Rightarrow x = y$

Προφανώς επί διότι αν $x \in \mathbb{R}^n$ τότε $T(x) = x$

π.χ. Για $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ έστω $x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$

$T(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad (T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$

T δεν είναι 1-1:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση:

T 1-1 $\Leftrightarrow$ $Ax = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση

$\Leftrightarrow$ η γραμμοκλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη (δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές)

T επί $\iff$ $Ax=b$ συμβιβαστό για κάθε b.

$\iff$ η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή.

π.χ. $T(x) = Ax$ όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Είναι η T 1-1 ή επί;

Εφόσον υπάρχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή, η T είναι επί. Δεν υπάρχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη, η T δεν είναι 1-1

π.χ. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

Είναι η T 1-1 ή επί;

- T είναι γραμμική: Έστω $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ και $c \in \mathbb{R}$

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1+y_1) + (x_2+y_2) \\ 5(x_1+y_1) + 7(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1) + 3(x_2+y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 + 3y_1 + x_2 + y_2 \\ 5x_1 + 5y_1 + 7x_2 + 7y_2 \\ x_1 + y_1 + 3x_2 + 3y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 + y_2 \\ 5y_1 + 7y_2 \\ y_1 + 3y \end{pmatrix} =$$

$$= T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$

$$T\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\lambda x_1+\lambda x_2\\ 5\lambda x_1+7\lambda x_2\\ \lambda x_1+3\lambda x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda(3x_1+x_2)\\ \lambda(5x_1+7x_2)\\ \lambda(x_1+3x_2)\end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix}3x_1+x_2\\ 5x_1+7x_2\\ x_1+3x_2\end{pmatrix} = \lambda T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Άρα δείξαμε ότι η T είναι γραμμική

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}, \quad T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix}$$

Άρα ο κανονικός πίνακας της T είναι:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 7\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\\ 3 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -8\\ 0 & -8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη $\Rightarrow T$ 1-1

δεν έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή $\Rightarrow T$ όχι επί

- οι στήλες του A γραμμικώς ανεξάρτητες $\Rightarrow T$ 1-1
- $Col(A) \neq \mathbb{R}^3$ διότι έχει μόνο 2 στήλες

Θεώρημα Αντιστρέψιμων Πινάκων: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A

I) A αντίστροφος

XIII) Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1

XIV) Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι επί

Ασκήσεις κεφαλαίου 3B

(6) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4)$

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = T(1,0,0,0) = (0,1,0,0)$

$T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = (0,1,1,0)$

$T(e_3) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = (0,0,1,1)$

δεν έχει ηγετικό σε κάθε στήλη

$T(e_4) = T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = (0,0,0,1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

- Δεν είναι 1-1
- Δεν είναι επί

δεν έχει ηγετικό σε κάθε γραμμή

14) i)

$T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$

Είναι γραμμική;

1ος τρόπος: $T((x_1, x_2) + (\xi_1, \xi_2)) = T(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2)$

$= (2(x_1 + \xi_1) - 3(x_2 + \xi_2), x_1 + \xi_1 + 4, 5(x_2 + \xi_2))$

$= (2x_1 + 2\xi_1 - 3x_2 - 3\xi_2, x_1 + \xi_1 + 4, 5x_2 + 5\xi_2)$

$= (2x_1 - 3x_2, x_1, 5x_2) + (2\xi_1 - 3\xi_2, \xi_1 + 4, 5\xi_2)$

$= T(x_1, \cancel{x_2)} + T(\xi_1, \xi_2)$

$\neq T(x_1, x_2) + T(\xi_1, \xi_2)$

2ος τρόπος: $T(0,0) = (0,4,0) \neq (0,0,0)$

Δεν είναι γραμμική διότι θα έπρεπε $T(0,0) = (0,0,0)$