Κεφ 4 - Ορίζουσες

→ Ορισμός

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Η ορίζουσα του A συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $|A|$ ή $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ και ορίζεται ως η ποσότητα

$$\boxed{\det(A) = ad - bc}$$

Υπενθύμιση: Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμη

τότε $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

→ Ορισμός

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

είναι $n \times n$ πίνακας

⇒ Ελάσσονα ορίζουσα

του a_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει όταν διαγράψουμε από τον A την i γραμμή και j στήλη.

⇒ Αλγεβρικό συμπλήρωμα

του a_{ij} είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Συμβολίζεται με C_{ij}

* Παράδειγμα $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 16.$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot 16 = 16}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2(-4) = 26$$

$$\Rightarrow \boxed{C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot 26 = -26}$$

* Το πρόσημο του C_{ij} προκύπτει από τον παρακάτω κανόνα

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & & \\ + & - & + & - & \cdots \end{pmatrix}$$

Για 2×2 πίνακα έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- $M_{11} = a_{22}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

  $C_{11} = M_{11} = a_{22}$

- $M_{12} = a_{21}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

  $C_{12} = -M_{12}$

- M_{21} $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

  $C_{21} = -a_{12}$

- $M_{22} = a_{11}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

  $C_{22} = a_{11}$

Ορισμός

Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, η ορίζουσα του A $\det(A)$ προκύπτει από τον πολ/σμό των στοιχείων μιας γραμμής ή στήλης με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{in}C_{in}$$

(ανάπτυγμα ως προς i γραμμή)

ή

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \dots + a_{nj}C_{nj}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = ;$$

Με ανάπτυγμα ως προς 1η γραμμή

$$\det(A) = +3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$ (κανόνας προσήμων)

$$= 3(-4) - 1(-11) + 0 = -1$$ //

Με ανάπτυγμα ως προς 1η στήλη

$$\det(A) = +3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ +4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) + 2(-2) + 5\cdot 3 = -1 \;//$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ;$$

Ανάπτυγμα ως προς 2η στήλη

$$\det(A) = +1\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ανάπτυγμα >> >>

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 = -6 \;//$$

Π.χ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $\det(A) = ;$

Αναπτυγμα ως προς 4η στηλη

$$\det(A) = a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{44}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{44} \cdot a_{11} a_{22} a_{33} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$

Θεωρημα

Αν ο A είναι $n \times n$ άνω τριγωνικός /κάτω ή διαγωνιος τοτε η ορίζουσα του A είναι ιση με το γινομενο των στοιχειων της κυριας διαγωνιου

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ \cdot & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & \cdot & - & - \end{pmatrix}$$

Θεωρημα

Αν ο τετραγωνικός $(n \times n)$ πινακας A εχει μηδενική γραμμή ή στήλη τοτε

$\det(A) = 0$

$(\det A = 0\, C_{1j} + 0\, C_{2j} + \dots + 0\, C_{nj})$

$= 0$

* ανταλλάξω τις γραμμές με στήλες (A^T)

Θεώρημα

$$\boxed{\det(A) = \det(A^T)}$$

Απόδειξη

- Ανάπτυγμα ως προς i γραμμή στον A
- Ανάπτυγμα ως προς i στήλη στον A^T

Θεώρημα

Έστω A (nxn)

i) Αν ο B προκύπτει από πολ/σιο γραμμής ή στήλης του A με πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

τότε $\Rightarrow \boxed{\det(B) = \lambda \det(A)}$

$$\left(\begin{aligned} \det(B) &= \lambda a_{i1} C_{i1} + \lambda a_{i2} C_{i2} + \dots + \lambda a_{in} C_{in} \\ &= \lambda (a_{i1} C_{i1} + \dots + a_{in} C_{in}) \\ &= \lambda \det(A) \end{aligned} \right)$$

ii) Αν ο B προκύπτει από εναλλαγή δύο γραμμών ή στηλών του A

τότε $\Rightarrow \boxed{\det(B) = -\det(A)}$

iii) Αν ο B προκύπτει από πρόσθεση πολλαπλασίου γραμμής ή στήλης του A σε μια άλλη γραμμή ή στήλη

τότε ⇒ $\boxed{\det(B) = \det(A)}$

Π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = ;$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \underbrace{-3}_{\text{κοινός παράγοντας}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 10R_2} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

* Κάνω γινόμενο στοιχείων κύριας διαγωνίου

$\Rightarrow (-3)(1)(1)(-55) = 165$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - 3C_1}$$

$$\longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 3 (-26)$$

$$= -546 //$$