03/11

Κεφάλαιο 4 - Ορίζουσες.

Ορισμός: (2x2 πίνακα)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Η ορίζουσα του A συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $|A|$ ή $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, και ορίζεται ως η ποσότητα $\boxed{\det(A) = ad - bc}$ ⊛

Υπενθύμιση:

Αν ο $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ αντιστρέψιμος τότε: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ ⊛

Ορισμός: (τετραγωνικό πίνακα)

Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ είναι nxn πίνακας.

Η ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} του a_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει όταν διαγράφουμε από τον A την i γραμμή και j στήλη. Το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij} είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$. Συμβολίζεται με C_{ij}.

Π.χ.:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 16$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 16 = 16$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 + (-4) \cdot 2 = 26$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 \cdot 26 = -26$$

⇒ Το πρόσημο του C_{ij} προκύπτει από τον παρακάτω κανόνα.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ + & - & + & - & \cdots \end{pmatrix}$$

Για 2x2 πίνακα έχουμε $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} \end{pmatrix}$

$$M_{11} = a_{22} \quad \Big\} \; M_{12} = a_{21} \quad \Big\} \; M_{21} = a_{12} \quad \Big\} \; M_{22} = a_{11}$$

$$\Rightarrow C_{11} = + M_{11} = a_{22} \quad \Big\} \; C_{12} = - M_{12} = -a_{21} \quad \Big\} \; C_{21} = - M_{21} = -a_{12} \quad \Big\} \; C_{22} = + M_{22} = a_{11}$$

Ορισμός:

Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, η ορίζουσα του A, $\det(A)$, προκύπτει από τον πολ/σμό των στοιχείων μιας γραμμής ή μιας στήλης με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα.

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ανάπτυγμα ως προς i γραμμή)

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ανάπτυγμα ως προς j στήλη)

π.χ:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{+}{3} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ -2 & \overset{+}{-4} & 3 \\ \overset{+}{5} & \overset{-}{4} & \overset{+}{-2} \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ;$$

- Ανάπτυγμα ως πρώτη γραμμή

$$\det(A) = +3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-4) - 1(-11) + 0 = -1$$

- Ανάπτυγμα ως προς πρώτη στήλη:

$$\det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3$$

$$= -1$$

π.χ:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det(A)=;$$

- Ανάπτυγμα ως προς $2^{η}$ στήλη.

ανάπτυγμα ως προς $2^{η}$ στήλη

$$\det(A)=1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2\cdot 3=-6$$

π.χ:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \det(A)=;$$

- Ανάπτυγμα ως προς την $4^{η}$ στήλη.

$$\det(A)=a_{44}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{44}\cdot a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{44}a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{44}$$

Θεώρημα:

Αν ο A είναι $n\times n$, άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός, ή διαγώνιος τότε η ορίζουσα του A είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

Θεώρημα:

Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει μηδενική γραμμή ή στήλη τότε:

$\det(A)=0$

$\det(A)=0\cdot C_{1j}+0\,C_{2j}+\dots+0\,C_{nj}=0$

Θεώρημα:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Απόδειξη:

Ανάπτυγμα ως προς i γραμμή στον A = Ανάπτυγμα ως προς i στήλη στον A^T.

Θεώρημα:

Έστω A $n \times n$ πίνακας:

i) αν ο B προκύπτει από πολ/σιο μιας γραμμής ή στήλης του A με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, τότε η ορίζουσα $\det(B) = \lambda \cdot \det(A)$

$$\left(\det(B) = \lambda a_{i1}C_{i1} + \lambda a_{i2}C_{i2} + \dots + \lambda a_{in}C_{in} = \lambda\,(a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in}) = \lambda \det(A)\right)$$

ii) Αν ο B προκύπτει από εναλλαγή 2 γραμμών ή στηλών του A τότε: $\det(B) = -\det(A)$

iii) αν ο B προκύπτει από πρόσθεση πολλαπλασίου μιας γραμμής ή στήλης του A σε μια άλλη γραμμή ή στήλη, τότε:
$\det(B) = \det(A)$

π.χ.:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_1 \Leftrightarrow R_2}{=\!=} - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{=\!=} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} \overset{R_3 \to R_3 - 10R_2}{=\!=} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$, άνω τριγωνικός.

Π.Χ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - 3C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 7 \cdot 3 (-26) = -546$$