3/10/20 <u>Κεφάλαιο 4 – Ορίζουσες</u>

• **Ορισμός:** Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Η ορίζουσα του A συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $|A|$ ή $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ και ορίζεται ως η ποσότητα **$\det(A) = ad - bc$.**

• **Υπενθύμιση:** Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος τότε $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

• **Ορισμός:** Έστω $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ είναι $n \times n$ πίνακας. Η ελάσσονα ορίζουσα του a_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει όταν διαγράψουμε από τον A την i γραμμή και j στήλη. Το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του a_{ij} είναι ο αριθμός **$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.**
Συμβολίζεται με C_{ij}.

• **Παράδειγμα:** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 40 - 24 = 16$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot 16 = 16$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & \cancel{1} & -4 \\ 2 & \cancel{5} & 6 \\ \cancel{7} & \cancel{4} & \cancel{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2(-4) = 26$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{5} \cdot 26 = -26$$

- Το πρόσημο του C_{ij} προκύπτει από τον παρακάτω κανόνα:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & & & & \\ + & - & + & - & + \cdots \end{pmatrix}$$

- Για 2x πίνακα έχουμε

$$A = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ \overset{-}{a_{21}} & \overset{+}{a_{22}} \end{pmatrix}$$

$M_{11} = a_{22}$	$M_{21} = a_{12}$
$C_{11} = M_{11} = a_{11}$	$C_{21} = -a_{12}$
$M_{12} = \pm M_{12}$	$M_{22} = a_{11}$
$C_{12} = -M_{12} = -a_{21}$	$C_{22} = a_{11}$

- Ορισμός: Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας, η ορίζουσα του A, $\det(A)$, προκύπτει από τον πολ/σμό των στοιχείων μιας γραμμής ή στήλης με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα.

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(ανάπτυγμα ως προς i γραμμή)

12.12 ή $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \dots a_{nj}C_{nj}$

(ανάπτυγμα ως προς j στήλη)

<u>Παράδειγμα:</u> $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = ;$

Με ανάπτυγμα ως προς $1^η$ γραμμή

$$\det(A) = \pm 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \pm 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - 1(-11) + 0 = -1$$

· Με ανάπτυγμα ως προς $1^η$ στήλη

$$\det(A) = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) + 2(-2) + 5 \cdot 3 = -1$$

• Παράδειγμα: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = ;$

• Ανάπτυγμα ως προς 2η στήλη (έχει τα περισσότερα 0)

• $\det(A) = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ ανάπτυγμα ως προς 2η στήλη

$= -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$

12:51 π.χ. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $\det(A) = ;$

Ανάπτυγμα ως προς 4η στήλη

$\det(A) = a_{44} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{44} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$= a_{44} a_{11} a_{22} a_{33} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$

Θεώρημα: Αν ο Α είναι $n \times n$ άνω τριγωνικός ή κάτω τριγωνικός ή διαγώνιος τότε η ορίζουσα του Α είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου.

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Θεώρημα: Αν ο τετραγωνικός πίνακας Α έχει μηδενική γραμμή ή στήλη τότε $\det(A)=0$

$[\det A = 0c_{1j} + 0c_{2j} + \ldots + 0c_{nj}]$

Θεώρημα: $\det(A) = \det(A^T)$

απόδειξη: Ανάπτυγμα ως προς i γραμμής στον Α = ανάπτυγμα προς i στήλη στον A^T.

Θεώρημα: Έστω Α $n \times n$ πίνακας

i) Αν ο Β προκύπτει από πολλαπλασιασμό μιας γραμμής ή στήλης του Α με $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ τότε $\det(B) = \lambda \det(A)$

ii) Αν ο Β προκύπτει από εναλλαγή δύο γραμμών ή στηλών του Α τότε $\det B = -\det A$

iii) Αν ο Β προκύπτει από πρόσθεση πολ/σιου μιας γραμμής ή στήλης του Α σε μια άλλη γραμμή ή στήλη τότε:

$$\det(B) = \det(A)$$

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = ;$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} -3 \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$\rightarrow -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1}$$

$$\rightarrow -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 10R_2} -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-55) = 165$$

παράδειγμα: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - 3C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-26)$$

$$= -546$$