06/11

Υπενθύμιση:

$det(A) \longrightarrow$ ανάπτυγμα ως προς γραμμή ή στήλη.

Αν ο A είναι τριγωνικός, $detA$ = γινόμενο στοιχείων κύριας διαγωνίου.

Πολλαπλασιασμός γραμμής με $\lambda \rightarrow \lambda \det A$

Εναλλαγή γραμμών $\longrightarrow -\det A$

Πρόσθεση πολλαπλασίου γραμμής σε άλλη $\rightarrow \det A$

Αντίστοιχα και με στήλες.

A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Θεώρημα αντίστροφου πίνακα ΤΑΕΙ:

(I) Αντιστρέψιμη

(XV) $\det A \neq 0$.

Θεώρημα:
Αν ο A έχει 2 γραμμές ή στήλες που είναι πολλαπλάσιο η μια της άλλης, τότε $\det A = 0$ (με γραμμοπράξεις προκύπτει μηδενική γραμμή ή στήλη).

π.χ:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow$

, διότι η $2^{η}$ στήλη είναι πολ/σιο της $1^{ης}$ γραμμής.

Ιδιότητες Οριζουσών:

① $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ για $n \times n$ πίνακα A και $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

② Αν A, B $n \times n$ πίνακες που διαφέρουν μόνο σε μια γραμμή ή στήλη τότε:

$$\det(A+B) = \det A + \det B$$

π.χ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Παρατήρηση: Γενικά δεν ισχύει $\det(A+B) = \det A + \det B$

π.χ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$\det A = 1$, $\det B = 8$

$\det(A+B) = 23$

$\Rightarrow \det(A+B) \neq \det A + \det B$.

③ $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\forall A, B$ $n \times n$ πίνακες

Θεώρημα:

Ένας $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Απόδειξη:

A αντιστρέψιμος

$\Leftrightarrow A \sim I_n$

$\Leftrightarrow$ υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_r$ ώστε

$E_r, \dots, E_2, E_1, A = I_n$

$\Leftrightarrow \det(E_r, \dots, E_2, E_1, A) = \det I_n = 1$.

$\Leftrightarrow \det E_r \cdot \det E_{r-1}, \dots, \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det A = 1$

$\Leftrightarrow \det \neq 0$

Θεώρημα:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Απόδειξη:

$A \cdot A^{-1} = I_n$

$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n = 1$

$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Κανόνας του Cramer:

Αν $AX = b$ είναι γραμμικό σύστημα όπου A η $n \times n$ πίνακας και $\det A \neq 0$ (άρα A αντιστρέψιμος) τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$X_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A}, \quad X_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A}, \quad \dots, \quad X_n = \frac{\det(A_n)}{\det A}$$

Όπου A_i είναι πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την i στήλη του A με b.

Π.χ:

$$3x_1 - 2x_2 = 6$$
$$-5x_1 + 4x_2 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-2)\cdot(-5) = 2 \neq 0$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \\ -5 & \end{vmatrix}} = \frac{24+16}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{24+30}{2} = 27$$

Εφαρμογή: Να ελεγχθεί αν τα διανύσματα

$$V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Τα V_1, V_2, V_3, V_4 είναι γρ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

$A = (V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4)$ είναι αντιστρέψιμος αν $\det A \neq 0$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & +0 \\ -6 & 0 & 3 & -0 \\ 4 & 7 & 0 & +3 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

↓ $C_1 \to C_1 - 5C_3$, $C_2 \to C_2 + 6C_3$

↓ $C_1 \to C_1 - 5C_3$, $C_2 \to C_2 + 6C_3$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -21 & 18 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 13 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -21 & 18 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} -21 & 18 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 13 & -10 \\ -21 & 18 \end{vmatrix} = -((-21)\cdot 7 - 18 \cdot 4) - 3 \cdot (13 \cdot 18 - (-10)(-21))$$

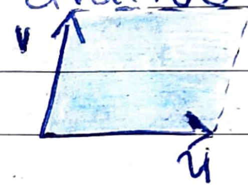
$$= 219 - 72 = 147$$

$\Rightarrow$ Τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

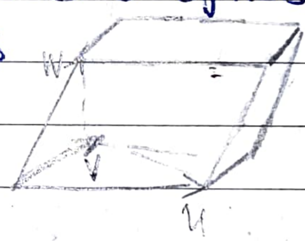
Γεωμετρικές Εφαρμογές:

1) αν u, v διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$ τότε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα u, v είναι ίσο με:

$|\det A|$, όπου $A = [u \ v]$

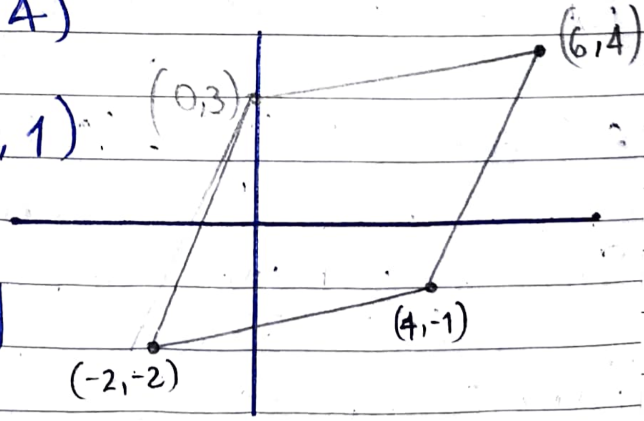


2) Αν u, v, w διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν είναι ίσος με $|\det A|$ όπου $A\,[u \ v \ w]$



π.χ.:

Να βρεθεί το εμβαδό του παρ/μου με κορυφές:
$(-2,-2)$, $(0,3)$, $(4,-1)$, $(6,4)$

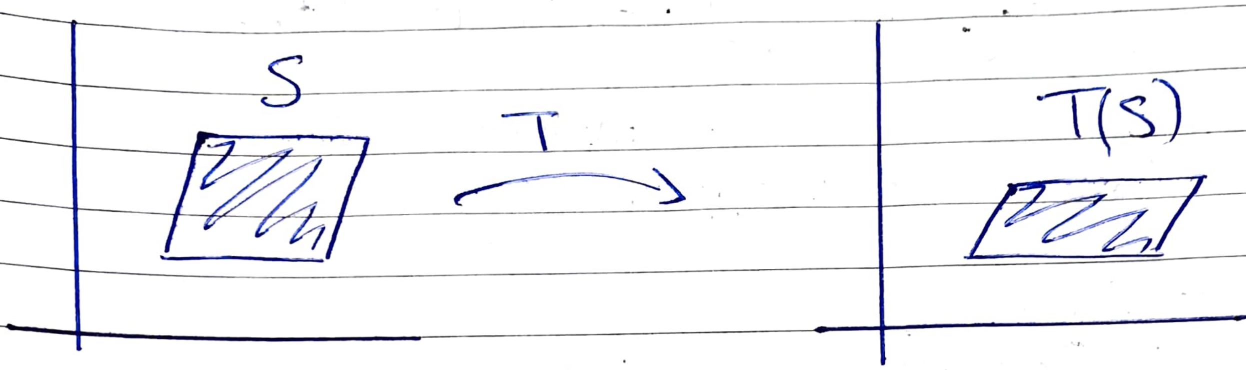


Έστω $u = (4-(-2), -1-(-2)) = (6, 1)$
$v = (0-(-2), 3-(-2)) = (2, 5)$

Εμβαδό $= \left| \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right| = |6 \cdot 5 - 2 \cdot 1|$
$= 28$

3) Έστω $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμ. μετασχηματισμός και A ο κανονικός πίνακάς του.

Αν S είναι παρ/μο στον $\mathbb{R}^2$ τότε εμβαδόν$(T(S))$ = $|\det A|$. εμβαδό(S).



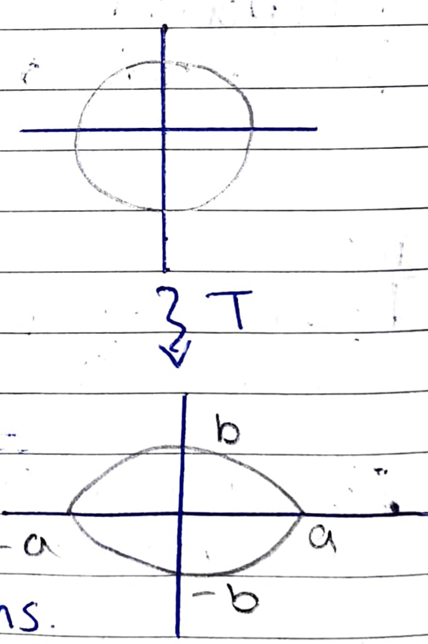
Αντίστοιχα:

Αν $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ γραμ. μετασχηματισμός με κανονικό πίνακα A και S είναι παρ/πεδο στον $\mathbb{R}^3$ τότε:

- Όγκος$(T(S))$ = $|\det A|$. Όγκος(S)

Παράδειγμα:

Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Έστω $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με κανονικό πίνακα

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Αν C ο κύκλος $x^2+y^2=1$ για κάθε $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C$ έχουμε $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$

ΣΑΔ $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ είναι σημείο της έλλειψης.

$\Rightarrow T(C)$ = έλλειψη

Άρα εμβαδό έλλειψης = $|\det A|$. εμβαδό κύκλου =

$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \cdot \pi \cdot 1^2 = ab\pi$

↳ ακτίνα κύκλου