6/11/20 **Υπενθύμιση:**

- det(A) → ανάπτυγμα ως προς γραμμή ή στήλη
- Αν ο Α είναι τριγωνικός, detA = γινόμενο στοιχείων κύριας διαγωνίου.

- Πολ/σμός γραμμής με λ → λdetA
- Εναλλαγή γραμμών → −detA
- Πρόσθεση πολ/σίου γραμμής σε άλλη → detA
- Αντίστοιχα και με στήλες

- Α αντιστρέψιμος ⇔ $\det A \neq 0$
- **Θεώρημα Αντίστροφου πίνακα ΤΑΕΙ**

I) Α αντιστρέψιμος
xvi) $\det A \neq 0$

Θεώρημα: Αν ο Α έχει δύο γραμμές ή στήλες που είναι πολ/σιο η μία της άλλης, τότε detA = 0. [Με γραμμοπράξεις προκύπτει μηδενική γραμμή ή στήλη]

π.χ. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ διότι η 2η στήλη είναι πολ/σιο της 1ης

Ιδιότητες οριζουσών:

1) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ για $n \times n$ πίνακα A και $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

2) Αν A, B $n \times n$ πίνακες που διαφέρουν μόνο σε μια γραμμή ή στήλη τότε:
$\det(A+B) = \det A + \det B$

π.χ
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$|A| = \det A$

Παρατήρηση: Γενικά δεν ισχύει ότι $\det(A+B) = \det A + \det B$

π.χ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

$\det A = 1$ $\det B = 8$, $\det(A+B) = 23$

$\Rightarrow \det(A+B) \neq \det A + \det B$

3) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
για κάθε A, B $n \times n$ πίνακες

Θεώρημα: Ένας $n \times n$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

Απόδειξη: A αντιστρέψιμος

$\iff A \sim I_n$

$\iff$ Υπάρχει στοιχειώδη πίνακες $E_1, E_2, \ldots$ ώστε $E_r \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$

$\iff \det(E_r \ldots E_2 \cdot E_1 \cdot A) = \det I_n = 1$

$\iff \det E_r \cdot \det E_{r-1} \ldots \det E_2 \cdot \det E_1 \cdot \det A = 1$

$\iff \det A \neq 0$

Θεώρημα: $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Απόδειξη: $A A^{-1} = I_n$

$\Rightarrow \det(A A^{-1}) = \det I_n = 1$

$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$

$\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Κανόνας του Cramer $\rightarrow$ Αφορά μόνο τετραγωνικά συστήματα

Αν $Ax = b$ είναι γραμμικό σύστημα όπου A $n \times n$ πίνακας και $\det A \neq 0$ (άρα A αντιστρέψιμος) τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \ldots \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

όπου A_i είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την i στήλη του A με b.

π.χ. $3x_1 - 2x_2 = 6$

$-5x_1 + 4x_2 = 8$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 - (-5)(-2) = 12 - 10 = 2 \neq 0$$

→ Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{24+16}{2} = 26$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{24+30}{2} = 27$$

Εφαρμογή: Να ελεγχθεί αν τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

Λύση: Τα V_1, V_2, V_3, V_4 είναι γραμμ. ανεξάρτητα αν και μόνο αν:

$A = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ είναι

αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -21 & 18 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 13 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -21 & 18 & 3 \end{vmatrix} =$$

$C_1 \to C_1 - 5C_3$ $\quad$ $C_1 \to C_1 - 5C_3$

$C_2 \to C_2 + 6C_3$ $\quad$ $C_2 \to C_2 + 6C_3$

$$= -\begin{vmatrix} -21 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 3(-1)\begin{vmatrix} 13 & -10 \\ -21 & 18 \end{vmatrix} = -(-21 \cdot 7 - 4 \cdot 18) + -3(13 \cdot 18 - 21 \cdot 10) = 147$$

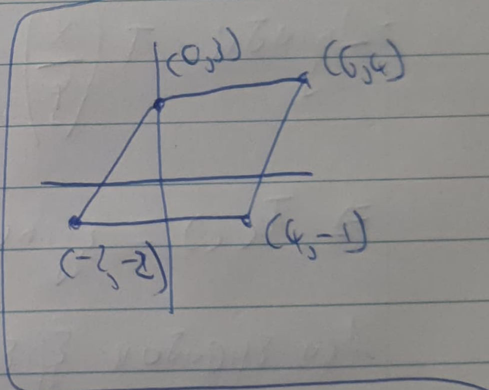
• Άρα τα διανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα

Γεωμετρικές εφαρμογές

1) Αν u, v διανύσματα στον R^2 ή στον R^3. Τότε το εμβαδό του παρ/μου που ορίζουν τα u, v είναι ίσο με |det(A)|, όπου $A=[u, v]$
στήλες

2) Αν u, v, w διανύσματα στον R^3, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν είναι ίσος με |det(A)| όπου $A = [u, v, w]$

π.χ. Να βρεθεί το εμβαδόν του παρ/μου με κορυφές $(-2,-2), (0,3), (4,-1), (6,4)$



Έστω $u = (4-(-2), -1-(-2)) = (6,1)$

$v = (0-(-2), 3-(-2)) = (2,5)$

Εμβαδόν $= \left| \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right| = |6\cdot 5 - 2\cdot 1| = 28$

3) Έστω $T: R^2 \to R^2$ γραμ. μετασχηματισμός και A ο κανονικός πίνακας του. Αν S είναι παρ/μο στον R^2 τότε:

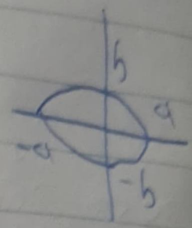
Εμβαδό(T(S)) = |detA| · Εμβαδόν S

Αντίστοιχα αν $T: R^3 \to R^3$ γραμ. μετακίνησης με κανονικό πίνακα A και S είναι παρ/πεδο στον R^3 τότε:

όγκος(T(S)) = |detA| · Όγκος(S)

Παράδειγμα: Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Έστω $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ με κανονικό πίνακα $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$



Αν C ο κύκλος $x^2+y^2=1$ για κάθε $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C$

έχουμε: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\by\end{pmatrix}$

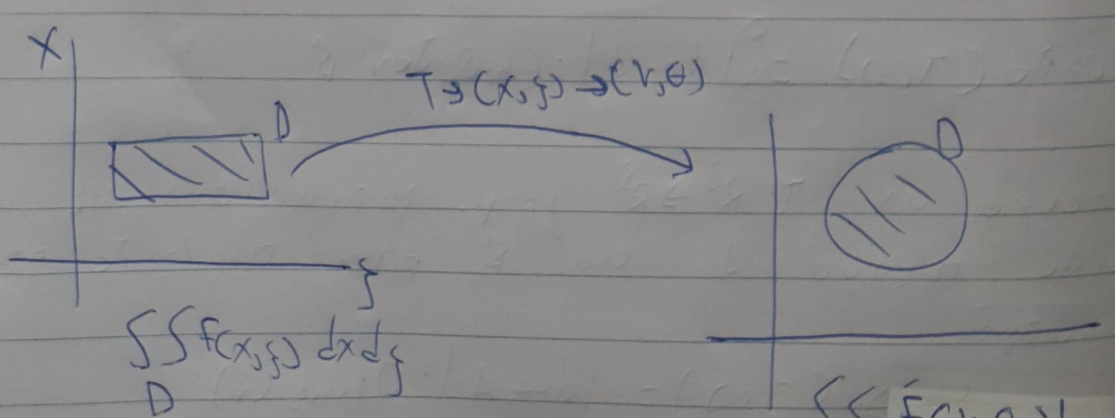
Δηλαδή $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ είναι σημείο της έλλειψης

$\Rightarrow T(C)=$ έλλειψη

Άρα εμβαδόν έλλειψης $=|\det A|\cdot$ εμβαδόν κύκλου

$$=\begin{vmatrix}a&0\\0&b\end{vmatrix}\cdot\pi\cdot1^2$$

$$=ab\pi$$



$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

$\iint_D f(r,\theta)\,|\ldots|\,dr\,d\theta$