10/11

Κεφάλαιο 5 — Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνιοποίηση.

Πίνακες <—> Γραμ. απεικονίσεις

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (πχ: $T = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Ορισμός:

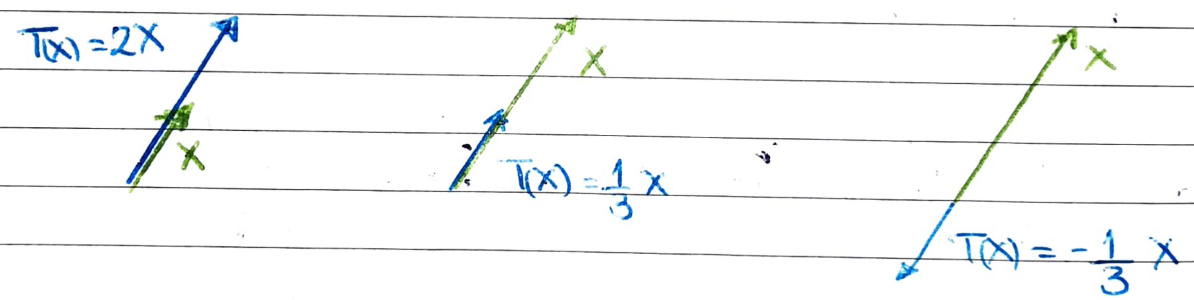
Έστω A $n \times n$ πίνακας. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν το Ax είναι πολ/σιο του x, δηλ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\boxed{Ax = \lambda x}$.

Το λ λέγεται ιδιοτιμή του A και το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

Παρατηρήσεις:

① Αν το $x=0$, τότε $Ax = \lambda x$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $(A \cdot 0 = \lambda \cdot 0)$.

② Τα ιδιοδιανύσματα είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ τα οποία η απεικόνιση $T(x) = Ax$ δεν περιστρέφει παρά μόνο επιμηκύνει.



Π.χ.:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3x$$

Άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Παρατηρούμε ότι: $(\lambda \in \mathbb{R}, x \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
&Ax = \lambda x \\
\Leftrightarrow\ &Ax - \lambda x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &Ax - \lambda I x = 0 \\
\Leftrightarrow\ &(A - \lambda I)x = 0
\end{aligned}
$$

Άρα λ ιδιοτιμή του A, αν το ομογενές σύστημα $(A-\lambda I)x = 0$, έχει μη τετριμμένες λύσεις.
Ισοδύναμα, αν $\det(A-\lambda I) = 0$

Θεώρημα:
Έστω $n \times n$ πίνακας A. Το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I) = 0$.
Η εξίσωση $\det(A-\lambda I) = 0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A.

π.χ: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{matrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{matrix}$$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)$
Χαρακτηριστική εξίσωση: $(\lambda-3)(\lambda+1) = 0$
Ιδιοτιμές: $\lambda = 3$, $\lambda = -1$.

- Η ορίζουσα $\det(A-\lambda I)$ δίνει πάντα πολυώνυμο της μορφής:
$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

- Στο προηγούμενο παράδειγμα $p(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$
Το $p(\lambda)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & & \\ & a_{22}-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \text{πολυώνυμο βαθμού} \leq n$$

Κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες. Άρα κάθε πίνακας A $n\times n$ έχει το πολύ n ιδιοτιμές.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(-\lambda(8-\lambda) - 1(-17)) - (0(8-\lambda) - 4) =$$

$$= -\lambda(-\lambda 8 + \lambda^2 + 17) + 4 = 8\lambda^2 - \lambda^3 - 17\lambda + 4 =$$

$$= -(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4)$$

Πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Το $\lambda = 4$ είναι ρίζα

Το πολυώνυμο διαιρείται με το $\lambda - 4$:

$$-(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4) = -(\lambda-4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) =$$

$$= -(\lambda-4)(\lambda-(2+\sqrt{3}))(\lambda-(2+\sqrt{3}))$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 2+\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 2-\sqrt{3}$$

Έστω $P(x) = x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Αν υπάρχει ακέραια ρίζα θα είναι διαιρέτης του a_0. Αν x_0 είναι ρίζα του $P(x)$ τότε $(x-x_0) \mid P(x)$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$, Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = a_{11}$, $\lambda_2 = a_{22}$, $\lambda_3 = a_{33}$, $\lambda_4 = a_{44}$.

Θεώρημα:

Αν ο A είναι $n \times n$ άνω/κάτω τριγωνικός ή διαγώνιος πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου

π.χ: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 5 & -8 & -1/4 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

Θεώρημα:

Αν A $n \times n$ πίνακας, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. λ είναι ιδιοτιμή του A
2. λ λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A-\lambda I)=0$
3. Το σύστημα $(A-\lambda I)X=0$ έχει μη τετριμμένες λύσεις.
4. Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα X ώστε $AX=\lambda X$

- Λόγω του ③, για να βρούμε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ, ψάχνουμε μη τετριμμένες λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-\lambda I)x=0$.
- Αυ σχετίζεται με το μηδενοχώρο του πίνακα $A-\lambda I$.

Ορισμός:
Αν λ είναι ιδιοτιμή του $n\times n$ πίνακα A, ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στον λ είναι ο χώρος $Nul(A-\lambda I)$.

Παράδειγμα:

$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Να βρεθούν ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώρος.

Εύρεση ιδιοτιμών:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)\cdot(-\lambda)-6=\lambda^2+\lambda-6=$$
$$=(\lambda+3)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow$ Ιδιοτιμές: $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$.

Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και ιδιοχώρου

$\lambda_1=2$, βρίσκουμε τις λύσεις του ομογενούς $(A-2I)x=0$

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1-2 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Άρα λύσεις του ομογενούς είναι $x_1-x_2=0\Rightarrow x_1=x_2,\ x_2\in\mathbb{R}$

Άρα $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ x_2\in\mathbb{R}$.

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώρος: $Nul(A-2I) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = -3$, βρίσκουμε τις λύσεις του ομογενούς $(A+3I) = 0$

$$(A+3I) = \begin{pmatrix} -1+3 & 3 \\ 2 & +3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

λύσεις-ιδιοτιμές: $x_1 + \frac{3}{2} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} x_2$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώρος: $Nul(A+3I) = Span\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$