10/11/20

Κεφάλαιο 5 – Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα, Διαγωνοποίηση

- Πίνακες ⟷ Γραμμ. απεικονίσεις

- $T: R^n \to R^n$ (π.χ. $T = R^2 \to R^2$

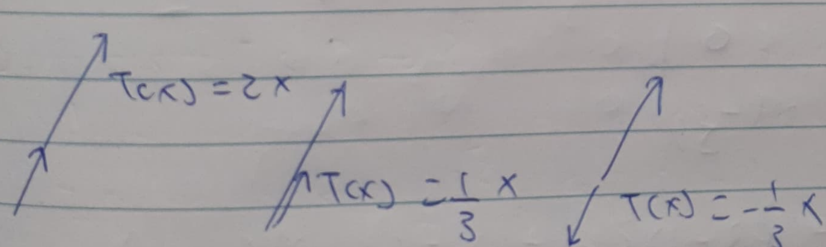
- **Ορισμός:** Έστω A $n \times n$ πίνακας. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in R^n$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του A αν το Ax είναι πολ/σιο του x δηλ. υπάρχει $\lambda \in R$ ώστε $Ax = \lambda x$

- Το λ λέγεται ιδιοτιμή του A και το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

- **Παρατηρήσεις**

1) Αν $x = 0$ τότε $Ax = \lambda x$ $\forall \lambda \in R$ ($A \cdot 0 = \lambda \cdot 0$)

2) Τα ιδιοδιανύσματα είναι στοιχεία του R^n τα οποία η απεικόνιση $T(x) = Ax$ δεν περιστρέφει παρά μόνο επιμηκύνει.



π.χ. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3x$$

Άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 3$

• **Παρατηρούμε ότι:** $Ax = \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x \neq 0)$

$$\iff Ax - \lambda x = 0$$
$$\iff x - \lambda I x = 0$$
$$\iff (A - \lambda I)x = 0$$

• Άρα λ ιδιοτιμή του A αν το ομογενές σύστημα $(A-\lambda I)x = 0$ έχει μη τετριμμένες λύσεις.

• Ισοδύναμα, αν $\det(A-\lambda I) = 0$

• **Θεώρημα:** Έστω $n \times n$ πίνακας A. Το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνο αν $\det(A-\lambda I)=0$. Η εξίσωση $\det(A-\lambda I)=0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A.

• **π.χ.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda I) = (3-\lambda)(-1-\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

Άρα χαρακτηριστική εξίσωση: $(\lambda-3)(\lambda+1)=0$

Ιδιοτιμές: $\lambda = 3$, $\lambda = -1$

• Η ορίζουσα $\det(A-\lambda I)$ είναι πάντα πολυώνυμο n-οστού βαθμού της μορφής:

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$$

• Στο προηγούμενο παράδειγμα: $p(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda+1) = \lambda^2-2\lambda-3$

Το $p(\lambda)$ λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & & \\ & a_{22}-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = \text{πολυώνυμο βαθμού} \leq n$$

• Κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες. Άρα: κάθε $n \times n$ πίνακας A έχει το πολύ n ιδιοτιμές.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-\lambda(8-\lambda)-17) - (0-1\cdot 4) = -\lambda(-8\lambda+\lambda^2+17)+4$$

$$= 8\lambda^2-\lambda^3-17\lambda+4 = -(\lambda^3-8\lambda^2+17\lambda-4)$$

Πιθανές ρίζες: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

Το $\lambda = 4$ είναι ρίζα

Άρα το πολυώνυμο διαιρείται με το $\lambda - 4$:

$$-(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4) = -(\lambda-4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1)$$
$$= -(\lambda-4)(\lambda-(2+\sqrt{3}))(\lambda-(2-\sqrt{3}))$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 2+\sqrt{3}, \ \lambda_3 \ 2-\sqrt{3}$$

• Έστω $p(x) = x^4 + \ldots a_1 x + a_0$. Αν υπάρχει ακέραιο ρίζα θα είναι διαιρέτης του a_0. Αν x_0 είναι ρίζα του $p(x)$ τότε $(x-x_0) | p(x)$.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = a_{11}, \ \lambda_2 = a_{22}, \ \lambda_3 = a_{33}, \ \lambda_4 = a_{44}$

Θεώρημα: Αν ο A είναι άνω/κάτω τριγωνικός ή διαγώνιος πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου

π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 \\ 5 & -8 & -1/4 \end{pmatrix}$, ιδιοτιμές: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}$

Θεώρημα: Αν A $n\times n$ πίνακας, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) Το λ είναι ιδιοτιμή του A
2) Το λ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A-\lambda I)=0$
3) Το σύστημα $(A-\lambda I)x=0$ έχει μη τετριμμένες λύσεις
4) Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x ώστε $Ax=\lambda x$

- Λόγω του (3), για να βρούμε ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ, ψάχνουμε μη τετριμμένες λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A-\lambda I)x=0$

- Αυτό σχετίζεται με τον μηδενοχώρο του πίνακα $A-\lambda I$.

Ορισμός: Αν λ είναι ιδιοτιμή του $n\times n$ πίνακα A, ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι ο χώρος $Null(A-\lambda I)$

Παράδειγμα: $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

Να βρεθούν ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώροι.

Εύρεση ιδιοτιμών

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}=(-1-\lambda)(-\lambda)-6=\lambda^2+\lambda-6$$
$$=(\lambda-2)(\lambda+3$$

Ιδιοτιμές $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$

Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων και ιδιόχωρου:

$\lambda_1 = 2$ Βρίσκουμε τις λύσεις του ομογενούς
$(A-2I)x = 0$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1-2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα λύσεις του ομογενούς είναι $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
$x_2 \in \mathbb{R}$

Άρα $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0 \right\}$

Ιδιόχωρος: $Nul(A-2I) = \left\{ x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = -3$, Βρίσκουμε τις λύσεις του ομογενούς $(A+3I) = 0$

$$A + 3I = \begin{pmatrix} -1+3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις: $x_1 + \frac{3}{2} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0 \right.$

Ιδιόχωρος: $Nul(A+3I) = Span\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$