11/09

Υπενθ:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_n + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ορισμός:

Ένας πίνακας είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται στοιχεία του πίνακα.

Π.χ:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες λέμε ότι είναι πίνακας mn. Τα mn λέγονται διαστάσεις του πίνακα.

$M_{m\times n}[\mathbb{Q}]$: πίνακας $m\times n$ με στοιχεία ρητούς αριθμούς.
Αντίστοιχα ορίζονται $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, ...

Τα στοιχεία συμβολίζονται με a_{ij}

γραμμή i, στήλη j.

Π.χ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij}) \text{ ή } A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

Ορισμός:

Ένας πίνακας λέγεται τετραγωνικός αν $m=n$. Η κύρια διαγώνιος αποτελείται από τα στοιχεία της κύριας μορφής a_{ii}.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

κύρια διαγώνιος.

Ορισμός (ισότητας):

Δύο πίνακες είναι ίσοι αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και ίδια στοιχεία, δηλαδή για $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$$\boxed{A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}, \forall i,j}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ίδια στοιχεία αλλά διαφορετική θέση άρα οι πίνακες είναι διάφοροι.

Πράξεις πινάκων:

(A) Πρόσθεση και Αφαίρεση:

- $A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$

  Δηλαδή προσθέτουμε στοιχείο προς στοιχείο.
- $A-B=(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$

  Δηλαδή αφαιρούμε στοιχείο προς στοιχείο.

Μόνο σε πίνακες ιδίων διαστάσεων.

Π.χ.:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$, $A+C \to$ δεν ορίζεται

$2-4=-2$, $1+3=4$, $0+5=5$, $3+1=4$
$-1+2=1$, $0+2=2$, $2+0=2$, $4-1=3$
$4+3=7$, $-2+2=0$, $7-4=3$, $0+5=5$

$$A-B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

$2+4=6$, $1-3=-2$, $0-5=-5$, $3-1=2$
$-1-2=-3$, $0-2=-2$, $2-0=2$, $4+1=5$
$4-3=1$, $-2-2=-4$, $7+4=11$, $0-5=-5$

(B) Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα:

Αν $A=(a_{ij})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda . A = (\lambda . a_{ij})$

Δηλ. πολ/ζουμε κάθε στοιχείο με το λ.

Π.Χ:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- $2.A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad 2\times2=4$, $2\times3=6$, $2\times4=8$
  $2\times1=2$, $2\times3=6$, $2\times1=2$

- $\frac{1}{2} . A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

- $-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

④ Πολλ/σμος πινάκων

- 2 πίνακες $m_1 \times n_1$ και $m_2 \times n_2$ πολ/ζονται όταν το $\boxed{n_1 = m_2}$.
Το γινόμενο είναι $m_1 \times n_2$

Π.χ.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

- Για το στοιχείο της θέσης (1,1) παίρνουμε την πρώτη γραμμή του A πίνακα και την $1^η$ στήλη του B πίνακα και τις βάζουμε δίπλα-δίπλα.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{γινομ.}]{\text{σε}} 1\times4 + 2\times0 + 4\times2 = 12.$$

- Για το στοιχείο (1,2) παίρνουμε την $1^η$ γραμμή του A και τη $2^η$ στήλη του B.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow 1\times1 + 2\cdot(-1) + 4\cdot7 = 27.$$

- Για τον υπολογισμό του ij στοιχείου του AB πολ/ζουμε τα στοιχεία της i γραμμής τους A πίνακα με της j στήλης του B πίνακα και προσθέτουμε (σε γινόμενο).

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

$(1,1) \to 1\cdot4 + 2\cdot0 + 4\cdot2 = 12.$

$(1,2) \to 1\cdot1 + 2(-1) + 4\cdot7 = 27.$

$(1,3) \to 1\cdot4 + 2\cdot3 + 4\cdot5 = 30$

$(1,4) = 1\cdot3 + 2\cdot1 + 4\cdot2 = 13$

$(2,1) = 2\cdot4 + 6\cdot0 + 0\cdot2 = 8$

$(2,2) = 2\cdot1 + 6(-1) + 0\cdot7 = -4$

$(2,3) = 2\cdot4 + 6\cdot3 + 0\cdot5 = 26$

$(2,4) = 2\cdot3 + 6\cdot1 + 0\cdot2 = 12.$

Ιδιότητες Πράξεων:

1) $A+B=B+A$
2) $A+(B+C)=(A+B)+C$
3) $A(B\cdot C)=(AB)C$
4) $A(B\pm C)=AB\pm AC$
5) $(B\pm C)A=BA\pm CA$
6) $\lambda\cdot(B\pm C)=\lambda B\pm\lambda C$ $\quad(\lambda\in\mathbb{R})$
7) $(\lambda\pm\mu)A=\lambda A\pm\mu A$ $\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$
8) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ $\quad(\lambda\in\mathbb{R})$, $\lambda A=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $A=0$
9) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ $\quad(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$

Παρατηρήσεις - Έστω 2 πίνακες A, B

Κατά σενάρια για πολ/σμο:

1) Είναι πιθανόν να ορίζεται ο AB και όχι ο BA.

π.χ: $A: 2\times3$, $B: 3\times4$

$AB: 2\times4$, $BA \rightarrow$ δεν ορίζεται.

2) Είναι πιθανόν οι AB, BA να ορίζονται αλλά να ~~είναι~~ έχουν διαφορετικές διαστάσεις.

π.χ: $A: 2\times3$, $B: 3\times2$.

$AB: 2\times2$, $BA: 3\times3$

3) Είναι πιθανόν οι AB, BA να ορίζονται, να έχουν ίδιες διαστάσεις αλλά να είναι άνισοι.

π.χ: $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}$

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 11 & 4\end{bmatrix} \neq BA=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

Μηδενικός Πίνακας:

$\mathbb{O}_{m\times n}$ = Πίνακας $m\times n$ με όλα τα στοιχεία $=0$.

Ταυτοτικός Πίνακας: $\boxed{I_{m\times n} = I_n}$:

Είναι ο $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία κυρίως διαγωνίου $=1$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία 0.

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες:

1) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$
2) $A - \mathbb{O} = A$
3) $A - A = A + (-A) = \mathbb{O}$
4) $\mathbb{O} A = \mathbb{O}$
5) Αν $\lambda . A = \mathbb{O}$ τότε $\lambda = 0$ ή $A = \mathbb{O}$
6) Για τετραγωνικό πίνακα A, $AI = IA = A$.

0: αριθμός
$\mathbb{O}$: πίνακας.

Παρατήρηση: (για το γινόμενο)

Είναι πιθανόν για δύο πίνακες A, B, $A \neq 0$ και $B \neq 0$ ενώ $AB = \mathbb{O}$

Π.χ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(1,1) = 0.3 + 1.0 = 0$
$(1,2) = 0.7 + 1.0 = 0$
$(2,1) = 0.3 + 0.2 = 0$
$(2,2) = 0.7 + 0.2 = 0$.