11/9/20 π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$ πίνακας = ορθογώνια διάταξη αριθμών → στοιχεία

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1}$ $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 4}$ $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}_{1\times 1}$

- Ένας πίνακας με m γραμμές και n στήλες λέμε ότι είναι πίνακας $m\times n$.
- Τα m και n λέγονται διαστάσεις του πίνακα.

- $M_{m\times n}(\mathbb{Q})$: πίνακας $m\times n$ με στοιχεία ρητούς αριθμούς
- Αντίστοιχα ορίζονται $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$, ...

- Τα στοιχεία συμβολίζονται με a_{ij} (i: γραμμή, j: στήλη)

- π.χ. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

$A=(a_{ij})$ ή $A=(a_{ij})_{m\times n}$

- <u>Ορισμός</u>: Ένας πίνακας $m\times n$ λέγεται τετραγωνικός αν $m=n$.
Η κύρια διαγώνιος από τα στοιχεία της μορφής a_{ii}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ορισμός: Δύο πίνακες είναι ίσοι αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και ίσα στοιχεία.

δηλ. για $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$

$A=B$, $i=j$, $a_{ij}=b_{ij}$ για κάθε i,j.

π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 9 & 9 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Πράξεις πινάκων

A) Πρόσθεση και αφαίρεση μόνο σε πίνακες ίδιων διαστάσεων

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

δηλαδή προσθέτουμε στοιχείο προς στοιχείο

$$A-B=(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij})$$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A+B=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A+C$ δεν ορίζεται

$A-B=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$, $A-C$ δεν ορίζεται

β) Πολ/σμος αριθμού με πίνακα

Αν $A=(a_{ij})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lambda A=(\lambda a_{ij})$

δηλ. πολ/ζουμε κάθε στοιχείο με λ

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$2A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

$-A=\begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

γ) Πολ/σμος πινάκων

- Δύο πίνακες $m_1 \times n_1$ και $m_2 \times n_2$ πολ/ζονται μόνο όταν $n_1=m_2$

π.χ. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

AB: 2×4

$AB=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$

- Για το στοιχείο στη θέση $(1,1)$ παίρνουμε 1η γραμμή του A, 1η στήλη του B και τις βάζουμε δίπλα.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{εσ. γιν.}} 1\cdot 4+2\cdot 0+4\cdot 2=12$

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & \_\_\_ \\ & \_\_\_ \end{bmatrix}$$

Για το στοιχείο στη θέση (1,2) παίρνουμε 1η γραμμή του A και 2η στήλη του B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2(-1) + 28 = 27$$

$$AB \begin{bmatrix} 12 & 27 & \_\_\_ \\ & \_\_\_ & \end{bmatrix}$$

$\vdots$

Τελικά $AB \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$

Για τον υπολογισμό του ij στοιχείου του AB πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία i γραμμής του A με τα j στήλης του B και τα προσθέτουμε (εσ. γινόμενο).

Ιδιότητες πράξεων

1) $A+B = B+A$
2) $A+(B+C) = (A+B)+C$
3) $A(BC) = (AB)C$
4) $A(B \pm C) = AB \pm AC$
5) $(B \pm C)A = BA \pm CA$
6) $\lambda(B \pm C) = \lambda B \pm \lambda C$
7) $(\lambda \pm \mu)A = \lambda A \pm \mu A$
8) $\lambda(AB) = \lambda AB$
9) $\lambda(\mu A) = \lambda \mu A$

Παρατηρήσεις: Έστω δύο πίνακες Α, Β:

1) Είναι πιθανόν να ορίζεται ο ΑΒ και ~~[illegible]~~ όχι ΒΑ. π.χ. $A: 2\times 3$, $B: 3\times 4$

$AB: 2\times 4$ $\quad BA:$ δεν ορίζεται

2) Είναι πιθανόν οι ΑΒ, ΒΑ να ορίζονται αλλά να έχουν διαφορετικές διαστάσεις

π.χ. $A: 2\times 3$ $\quad B: 3\times 2$

$AB\ 2\times 2$ $\quad BA: 3\times 3$

3) Είναι πιθανόν οι ΑΒ, ΒΑ να ορίζονται να έχουν ίδιες διαστάσεις αλλά να είναι άνισοι

π.χ. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Μηδενικός πίνακας

$O_{m\times n}$ = πίνακας $m\times n$ με όλα τα στοιχεία $= 0$

Ταυτοτικός πίνακας: $I_{n\times n} = I_n$

Είναι ο $n\times n$ τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία κύριας διαγωνίου $= 1$, όλα τα υπόλοιπα στοιχεία $= 0$

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες

1) $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$

2) $A - \mathbb{O} = A$

3) $A - A = A + (-A) = \mathbb{O}$

4) $\mathbb{O}A = \mathbb{O}$

5) Αν $\lambda A = \mathbb{O}$ τότε $\lambda = 0$ ή $A = \mathbb{O}$

6) Για τετρ. πίνακα $AI = IA = A$

$0 \to$ αριθμός

$\mathbb{O} \to$ πίνακας