13/11

Υπενθύμιση:

$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$ δίνει χαρακτηριστική εξίσωση

$\Rightarrow$ ρίζες $\rightarrow$ ιδιοτιμές

Το λ είναι ιδιοτιμή $\Leftrightarrow XA=\lambda X$

Το x λέγεται αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα* για την ιδιοτιμή λ.

$Ax-\lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I)x=0$

πχ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, Να βρεθούν ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώροι.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda)+2\right] = (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

Ιδιοτιμές είναι: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ $(A-\lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow (A-I)x = 0$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3 \in \mathbb{R}, x_3 \neq 0 \right\}$

Ιδιοχώροι: $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ $(A-\lambda_2 I)x = 0 \Leftrightarrow (A-2I)x = 0$

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; x_2, x_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$

Ιδιοχώροι: $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Σημείωση:

$x \neq 0$: $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I)x = 0$

$Ax = \lambda x$

$A(kx) = k(Ax) = (k\lambda)x$

Θεώρημα:

Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A.

Απόδειξη: Έστω $\det(A-\lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$

Αν το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή, είναι ρίζα του παραπάνω πολυωνύμου.

Άρα $\det(A - 0I) = (-1)^n a_0 = 0$

$\Rightarrow \det A = 0$.

Θεώρημα:
Αν $V_1, \dots, V_r$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές, τότε το $\{V_1, \dots, V_r\}$ είναι γρ. ανεξάρτητο
διακριτές = διαφορετικές μεταξύ τους.

Απόδειξη: με απαγωγή σε άτοπο

- Έστω $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ γρ εξαρτημένο

[Υπάρχουν $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathbb{R}$, όχι όλα $=0$ ώστε $k_1V_1 + k_2V_2 + \dots + k_rV_r = 0$]
$\Leftrightarrow$ υπάρχει κάποιο V_p ώστε να είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
- Υπάρχει $p \leq r$ ώστε το V_p να γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $V_1, V_2, \dots, V_{p-1}$
Διαλέγουμε το ελάχιστο με αυτήν την ιδιότητα.
- Υπάρχουν $k_1, k_2, \dots, k_{p-1} \in \mathbb{R}$, όχι όλα $=0$ ώστε
$k_1V_1 + k_2V_2 + \dots + k_{p-1}V_{p-1} = V_p$
Αν ο A ο πίνακας στον οποίο αναφέρεται το θεώρημα.

$$A(k_1V_1 + k_2V_2 + \dots + k_{p-1}V_{p-1}) = AV_p$$
$$\Rightarrow A(k_1V_1) + A(k_2V_2) + \dots + A(k_{p-1} \cdot V_{p-1}) = AV_p$$
$$\Rightarrow k_1(AV_1) + k_2(AV_2) + \dots + k_{p-1}(A \cdot V_{p-1}) = AV_p$$
$$\Rightarrow k_1(\lambda_1 V_1) + k_2(\lambda_2 V_2) + \dots + k_{p-1}(\lambda_{p-1} \cdot V_{p-1}) = \lambda_p V_p$$
όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα $V_1, V_2, \dots, V_p$.
$$\Rightarrow (k_1\lambda_1)V_1 + (k_2\lambda_2)V_2 + \dots + (k_{p-1}\lambda_{p-1})V_{p-1} = \lambda_p(k_1V_1 + \dots + k_{p-1}V_{p-1})$$
$$\Rightarrow (k_1\lambda_1)V_1 + \dots + (k_{p-1} \cdot \lambda_{p-1})V_{p-1} - \lambda_p(k_1V_1 + \dots + k_{p-1}V_{p-1}) = 0$$
$$\Rightarrow (k_1\lambda_1)V_1 + \dots + (k_{p-1}\lambda_{p-1})V_{p-1} - [(\lambda_p \cdot k_1)V_1 + \dots + (\lambda_p \cdot k_{p-1})V_{p-1}] = 0$$
$$\Rightarrow (k_1\lambda_1 - \lambda_p k_1)V_1 + \dots + (k_{p-1}\lambda_{p-1} - \lambda_p \cdot k_{p-1})V_{p-1} = 0$$

Δηλαδ. τα $V_1, \dots, V_{p-1}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
Άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι το p είναι ελάχιστο ώστε $V_1, V_2, \dots, V_p$ γρ. εξαρτημένο.

Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A έχει παράγοντα της μορφής $(\lambda-a)^r$ τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή a έχει αλγεβρική πολλαπλότητα r.

Π.χ.:

Έστω πίνακας A με χαρ. πολυώνυμο

$$\lambda^6-4\lambda^5-12\lambda^4=\lambda^4(\lambda^2-4\lambda-12)=\lambda^4(\lambda-6)(\lambda+2)$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1=0$ με αλγεβ. πολλαπλότητα 4

$\lambda_2=6$ — " — 1

$\lambda_3=-2$ — " — 1

Κάθε πίνακας έχει ιδιοτιμές, λαμβάνοντας υπόψιν την πολλαπλότητα

$(\lambda-2)^3(\lambda-4)$

Θεώρημα:

Αν ο A είναι nxn πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ τότε

$tr A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

$\hookrightarrow$ ίχνος

[Σε πολυώνυμο $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, το a_{n-1} είναι το άθροισμα των ριζών.]

Θεώρημα:

Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι ίδιες με τον A^T.

(Απόδειξη → Άσκηση)

Θεώρημα:

Αν ο A είναι nxn πίνακας με nxn διακριτές ιδιοτιμές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: $\dim(\mathbb{R}^n)=n$

Από προηγούμενο Θεώρημα τα ιδιοδιανύσματα είναι γραμ. ανεξάρτητα, n γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα → αποτελούν βάση.