13/11/20 · $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow$ ρίζες → ιδιοτιμές

· Το λ είναι ιδιοτιμή $\Leftrightarrow Ax=\lambda x$

→ Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

$Ax-\lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda I)x=0$

Παράδειγμα: $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Να βρεθούν ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώρος

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)[-\lambda(3-\lambda)+2]=-(\lambda-2)^2(\lambda-1)$$

· Ιδιοτιμές: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$

· $\lambda_1=1$ $(A-\lambda_1 I)x=0 \Leftrightarrow (A-I)x=0$

$$A-I=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1+2x_3&=0 \\ x_2-x_3&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1&=-2x_3 \\ x_2&=x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 \in \mathbb{R}, \, x_3 \neq 0 \right\}$
- ιδιοχώρος: $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\lambda_2 = 2 \quad (A - \lambda_2 I)x = 0 \iff (A - 2I)x = 0$
- $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- ιδιοδιανύσματα: $\left\{ x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$
- ιδιοχώρος: $\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Θεώρημα: Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A

Απόδειξη: Έστω $\det(A - \lambda I) = (-1)^n \cdot (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)$

Αν $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή, είναι ρίζα του παραπάνω πολυωνύμου. Άρα $\det(A - 0I) = a_0 = 0$
$\Rightarrow \det A = 0$

Θεώρημα: Αν $v_1, \dots v_r$ είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακριτές ιδιοτιμές $\left(= \text{διαφορετικές μεταξύ τους}\right)$ τότε το $\{v_1, \dots v_r\}$ είναι γραμμ. ανεξ.

Απόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο

→ Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ γρ. εξαρτημένο

→ Υπάρχουν $k_1, k_2, \dots k_r \in \mathbb{R}$, όχι όλα $= 0$ ώστε
$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r = 0$

$\Leftrightarrow$ Υπάρχει κάποιο v_p ώστε να είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

→ Υπάρχει $p \leq r$ ώστε v_p να γράφεται σαν γραμμ. συνδυασμός των $v_1, v_2, \dots v_{p-1}$. Διαλέγουμε το ελάχιστο με αυτήν την ιδιότητα.

→ Υπάρχουν $a_1, a_2, \dots a_{p-1} \in \mathbb{R}$ όχι όλοι 0 ώστε

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots a_{p-1} v_{p-1} = v_p$$

→ Αν A ο πίνακας στον οποίο αναφέρεται το θεώρημα.

$A(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_{p-1} v_{p-1}) = A v_p$

$\Rightarrow a_1 (A v_1) + a_2 (A v_2) + \dots + a_{p-1} (A v_{p-1}) = A v_p$

$\Rightarrow a_1 (\lambda_1 v_1) + a_2 (\lambda_2 v_2) + \dots + a_{p-1} (\lambda_{p-1} v_{p-1}) = \lambda_p v_p$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα $v_1, v_2, \dots v_p$

$\Rightarrow (a_1 \lambda_1) v_1 + \dots (a_{p-1} \lambda_{p-1}) v_{p-1} - ((\lambda_p a_1) v_1 + \dots + ((\lambda_p a_{p-1}) \cdot v_{p-1}) = 0$

$\Rightarrow (a_1 \lambda_1 - \lambda_p a_1) v_1 + \dots + (a_{p-1} \lambda_{p-1} - \lambda_p a_{p-1}) v_{p-1} = 0$

→ Δηλ. τα $v_1, \dots v_{p-1}$ είναι

Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A έχει παράγοντα της μορφής $(\lambda - a)^r$ τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή a έχει αλγεβρική πολλαπλότητα r.

π.χ. Έστω πίνακας A με χαρ. πολυώνυμο

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4 (\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4 (\lambda - 6)(\lambda + 2)$$

$\Rightarrow$ ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$ με αλγ. πολλαπλότητα 4

$\lambda_2 = 6$ » » 1

$\lambda_3 = -2$ » » 1

κάθε πίνακας έχει ιδιοτιμές, λαμβάνοντας υπόψιν των πολλαπλότητα:

$$(\lambda-2)^3(\lambda-4).$$

Θεώρημα: Αν ο A είναι $n\times n$ πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τότε $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

Απόδειξη: $\det(A-\lambda I) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$

Για $\lambda=0$: $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

Θεώρημα: Αν ο A είναι $n\times n$ πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ τότε:

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n.$$

[Σε πολυώνυμο $x^n + a_{n-1}x^n + \dots + a_1x + a_0$, το a_{n-1} είναι το άθροισμα των ριζών]

Θεώρημα: Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι οι ίδιες με A^T.

Θεώρημα: Αν ο A είναι $n \times n$ πίνακας με n διακριτές ιδιοτιμές τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα αποτελούν βάση για τον R^n.

Απόδειξη: $\dim(R^n) = n$

Από προηγούμενο θεώρημα, τα ιδιοδιανύσματα είναι γρ. ανεξάρτητα, n γρ. ανεξ.

γρ. ανεξ. διανύσ. → αποτελούν βάση